PERIODICAL ROOM
GENERAL LIBRARY
UNIV. OF MICH.

SEP 1 2 19

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

Band 160

Heft 4

Ausgegeben den 20. August 1929

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1929

Jährlich 3 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

Band 160. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Baer, Reinhold, Zur Einführung des Scharbegriffs	199
Baer, Reinhold, Zur Topologie der Gruppen	208
Neumann, J. v., Über eine Widerspruchfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre	227
Inhaltsverzeichnis der Bände 141—160	242

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgend einem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Behringweg 7.

Zur Einführung des Scharbegriffs.

Von *Reinhold Baer* in Halle a. S.

Einleitung.

Seit *F. Klein* 1872 im Erlanger Programm die Abbildungsgruppe als Ordnungsprinzip der Geometrie erkannte, ist das Studium von Abbildungsgruppen und ihren Invarianten — im allgemeinsten Verstande — zum zentralen Problem in den meisten mathematischen Disziplinen geworden. Ich erinnere nur, um etwas besonders andersartiges zu nennen, an die *Dedekind*sche Auffassung der *Galois*schen Theorie. — Nur ein Gebiet ist in dieser Hinsicht etwas stiefmütterlich behandelt worden: die Gruppentheorie selbst. Man untersuchte die Automorphismengruppe einerseits und das Problem der Darstellung einer Gruppe als Abbildungsgruppe andererseits, wobei als abzubildende Menge etwa die Gruppe selbst zu Grunde gelegt wird.

Es stellt sich die allgemeine Frage: gegeben eine Gruppe $\mathfrak{G}$ und eine Gruppe A eineindeutiger Abbildungen von $\mathfrak{G}$ auf sich; *was bleibt in* $\mathfrak{G}$ *gegenüber* A *invariant*? Was dies bedeutet, insbesondere wie diese Frage für „allgemeine" Gruppen zu präzisieren ist, das wird uns im Beginn des § 1 beschäftigen; wir werden hierbei durchaus in Analogie zur sog. „Invariantentheorie" im engeren Sinne verfahren. Die sich hier ergebende Problemstellung werden wir dann an einem speziellen Beispiel durchführen, indem wir als Gruppe A die der ähnlichen Abbildungen zu Grunde legen. Diese besteht aus allen Abbildungen der Form: $\mathfrak{x} \to \mathfrak{a}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{b}$, wo $\mathfrak{x}$ alle Elemente von $\mathfrak{G}$ durchläuft, während $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zwei für die vorliegende Abbildung charakteristische Elemente aus $\mathfrak{G}$ sind. Es erweist sich dann als die Fundamentalinvariante von A der Ausdruck:

$$F(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) = \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2^{-1} \mathfrak{x}_3,$$

wo die $\mathfrak{x}_i$ beliebige Elemente aus $\mathfrak{G}$ sein können. $F(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3)$ stellt aber gerade das Kompositionsgesetz für Scharen — im Sinne von *Prüfer* [1]) — dar.

Betrachten wir jetzt die einfach transitive Untergruppe P von A, die alle und nur die Abbildungen: $\mathfrak{x} \to \mathfrak{x}\,\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{G}$ auf sich enthält, so erhalten wir im § 2 die Charakterisierung einer Unterschar von $\mathfrak{G}$ als einer solchen Teilmenge von $\mathfrak{G}$, die bei allen Abbildungen aus P entweder in sich oder in ein fremdes System übergeht. Besteht diese Eigenschaft sogar gegenüber A, so haben wir es mit einer normalen Unterschar von $\mathfrak{G}$ zu tun, d. i. eine Restklasse nach einem Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

Schließlich untersuchen wir im § 3 die Gruppe A selbst und ihr Verhältnis zur Gruppe Γ aller Gruppenautomorphismen von $\mathfrak{G}$. Es erweist sich insbesondere, daß die Vereinigungsgruppe von Γ und P, ebenso auch die von Γ und A die Gruppe aller Automorphismen von $\mathfrak{G}$ ist, wenn man $\mathfrak{G}$ als Schar auffaßt [2]).

---

[1]) *H. Prüfer*: Math. Zeitschrift Bd. 20 (1924), p. 165—187, bes. §§ 3—5.

[2]) Daß P eine Gruppe von Scharautomorphismen ist, findet sich schon bei *Prüfer*, l. c. § 5 (1. Absatz).

Bezeichnungen:

Sind A, B zwei Untergruppen einer Gruppe, so ist:

$A \frown B$ der Durchschnitt von A und B,

$A \vee B$ die Vereinigungsgruppe von A und B, d. h. die kleinste A und B enthaltende Gruppe.

$a \varepsilon A \cdot = \cdot a$ ist Element von A.

Abstrakte Gruppen und ihre Unterscharen werden durch große deutsche Buchstaben: $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}$, . . .,

ihre Elemente durch kleine deutsche Buchstaben: $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, . . ., $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$, . . .,

Abbildungen durch kleine griechische Buchstaben: $\alpha, \alpha(\mathfrak{x})$, . . .,

Abbildungsgruppen durch große griechische Buchstaben: $\mathsf{A}, \mathsf{P}, \Lambda, \Gamma, \Sigma$ bezeichnet.

§ 1. Die Invariantentheorie der Gruppe der ähnlichen Abbildungen.

Unter einem *rationalen Ausdruck* in den [Gruppenelementen] $\mathfrak{x}_i (i = 1, \ldots, n)$ verstehen wir einen Ausdruck: $R(\{\mathfrak{x}_i\}) = R(\,\cdot\,) = R$, der aus den $\mathfrak{x}_i$ durch endlich häufige Anwendung der Operationen: Multiplikation und Inversenbildung aufgebaut ist. $R(\,\cdot\,)$ heißt *unverkürzbar*, wenn es in $R(\,\cdot\,)$ nicht vorkommt, daß für irgendein festes i hintereinander $\mathfrak{x}_i$ und $\mathfrak{x}_i^{-1}$ in $R(\,\cdot\,)$ auftreten.

Weiter sagen wir: in der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist die Relation

$$R(\{\mathfrak{x}_i\}) = 1$$

erfüllt, wo $R(\,\cdot\,)$ ein rationaler Ausdruck ist, wenn diese Relation für jedes beliebige Wertesystem $\{\mathfrak{x}_i\}$ aus $\mathfrak{G}$ gilt.

Schließlich nennen wir die $\mathfrak{x}_i$ ein System von „*Unbestimmten*“, wenn für unverkürzbare rationale Ausdrücke $R(\,\cdot\,)$ dann und nur dann

$$R(\{\mathfrak{x}_i\}) = 1$$

erfüllt ist, wenn in R alle $\mathfrak{x}_i$ nur in der nullten Potenz, d. h. gar nicht auftreten[1])[2]).

Dann gilt der

Satz 1: *Gilt eine Gleichung*:

$$R_1(\{\mathfrak{x}_i\}) = R_2(\{\mathfrak{x}_i\}), \tag{1}$$

wo R_1 und R_2 rationale Ausdrücke in den $\mathfrak{x}_i$ sind, zwischen den Unbestimmten $\mathfrak{x}_i$, so ist die Relation:

$$R_1 R_2^{-1}(\,\cdot\,) = 1 \tag{2}$$

in jeder Gruppe erfüllt; gilt aber die Ungleichung

$$R_1(\{\mathfrak{x}_i\}) \neq R_2(\{\mathfrak{x}_i\})$$

zwischen den Unbestimmten $\mathfrak{x}_i$, so gibt es Gruppen[3]), *in denen die Relation* (2) *nicht erfüllt ist.*

Oder kürzer:

Dann und nur dann ist in jeder Gruppe die Relation (2) *erfüllt, wenn* (1) *eine Gleichung zwischen Unbestimmten ist.*

Unter einer allgemeinen Abbildungsgruppe einer Gruppe wollen wir eine solche verstehen, die für jede Gruppe definiert ist. Z. B. die der Gruppenautomorphismen

---

[1]) Die Unbestimmten erzeugen die sog. freien Gruppen.

[2]) Eine Unbestimmte $\mathfrak{x}$ erfüllt in jeder Gruppe nur die verkürzbare Relation: $\mathfrak{x}\mathfrak{x}^{-1} = 1$.

[3]) z. B. die freien Gruppen.

$$\alpha(\mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{x}_2) = \alpha(\mathfrak{x}_1) \cdot \alpha(\mathfrak{x}_2),$$

die der ähnlichen Abbildungen:

$$\alpha(\mathfrak{x}) \cdot \mathfrak{z}_1 \mathfrak{x}^{-1} \mathfrak{z}_2 = 1 \qquad \text{etc.}$$

Sei schließlich $J(\{\mathfrak{x}_i\})$ ein unverkürzbarer Ausdruck in den Unbestimmten $\mathfrak{x}_i$; $J(\cdot)$ wird durch die Abbildungen: $\mathfrak{x} \to \alpha(\mathfrak{x})$ unserer allgemeinen Abbildungsgruppe *isomorph* abgebildet, wenn für jedes $\alpha(\cdot)$ dieser Gruppe gilt:

$$J[\{\alpha(\mathfrak{x}_i)\}] = \alpha[J(\{\mathfrak{x}_i\})]. \tag{3}$$

Es stellt sich dann das folgende allgemeine Problem:

Zu einer vorgegebenen allgemeinen Gruppe A von Abbildungen ist ein System S von unverkürzbaren rationalen Ausdrücken in Unbestimmten aufzusuchen, so daß

1. jeder der Ausdrücke aus S von der ganzen Gruppe A isomorph abgebildet wird,
2. jeder von ganz A isomorph abgebildete Ausdruck in Unbestimmten sich aus den Ausdrücken aus S rational unter Benutzung der Operation des Einsetzens aufbauen läßt.

S heißt dann ein *vollständiges Invariantensystem der allgemeinen Gruppe* A.

Aus Satz 1 ergibt sich, daß die Ausdrücke aus S in jeder speziellen Gruppe $\mathfrak{G}$ durch A isomorph abgebildet werden; es kann aber spezielle Gruppen $\mathfrak{G}$ geben, in denen es von A isomorph abgebildete Ausdrücke gibt, die sich nicht aus S aufbauen lassen.

Definition 1: *Eine eineindeutige Abbildung* $\mathfrak{x} \to \alpha(\mathfrak{x})$ *der Gruppe* $\mathfrak{G}$ *auf sich heißt dann und nur dann eine ähnliche, wenn es zwei Elemente* $\mathfrak{z}_i (i = 1, 2)$ *gibt, die nur von* α*, aber nicht von* $\mathfrak{x}$ *abhängen, so daß* $\alpha(\mathfrak{x}) = \mathfrak{z}_1 \mathfrak{x} \mathfrak{z}_2$ *für alle* $\mathfrak{x}$ *ist.*

Wir wollen jetzt das oben skizzierte Problem für die Gruppe A aller ähnlichen Abbildungen lösen; es gilt der

Satz 2: *Der Ausdruck:*

$$F(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) = \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2^{-1} \mathfrak{x}_3$$

in den Unbestimmten $\mathfrak{x}_i (i = 1, 2, 3)$ *stellt ein vollständiges Invariantensystem der allgemeinen Abbildungsgruppe* A *dar.*

Beweis: A. Es ist:

$$F(\{\alpha(\mathfrak{x}_i)\}) = \mathfrak{z}_1 \mathfrak{x}_1 \mathfrak{z}_2 (\mathfrak{z}_1 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{z}_2)^{-1} \mathfrak{z}_1 \mathfrak{x}_3 \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z}_1 \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2^{-1} \mathfrak{x}_3 \mathfrak{z}_2 = \alpha[F(\{\mathfrak{x}_i\})],$$

d. h. $F(\cdot)$ wird durch A isomorph abgebildet.

B. Werde jetzt $J(\{\mathfrak{x}_i\})$ $(i = 1, \ldots, n)$ durch A isomorph abgebildet; dann folgt aus (3) und der Definition 1:

$$J[\{\mathfrak{z}_1 \mathfrak{x}_i \mathfrak{z}_2\}] = \mathfrak{z}_1 J[\{\mathfrak{x}_i\}] \mathfrak{z}_2. \tag{4}$$

Sei jetzt $J[\{\mathfrak{x}_i\}] = \mathfrak{x}_{i_1}^{\varepsilon_1} J'(\cdot)$, wo $J'(\cdot)$ ein unverkürzbarer Ausdruck in den $\mathfrak{x}_i$ ist, der nicht mit $\mathfrak{x}_{i_1}$ beginnt, und $\varepsilon_1 = \pm 1$ ist [1]). $J(\cdot)$ ist ja ein unverkürzbarer Ausdruck. Dann folgt $\varepsilon_1 = +1$, da sonst die linke Seite von (4) mit $\mathfrak{z}_2^{-1}$, die rechte aber mit $\mathfrak{z}_1$ beginnen würde, also eine nicht triviale Relation zwischen den Unbestimmten $\mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{z}_l$ bestände.

Sei weiter

$$J'(\{\mathfrak{x}_i\}) = \mathfrak{x}_{i_2}^{\varepsilon_2} \mathfrak{x}_{i_3}^{\varepsilon_3} J''(\cdot), \tag{5}$$

wo $J''(\cdot)$ ein unverkürzbarer Ausdruck in den $\mathfrak{x}_i$, $\varepsilon_2 = \pm 1$, $\varepsilon_3 = \pm 1$, $i_2 \neq i_1$, $i_3 \neq i_2$ ist und J'' mit einem $\mathfrak{x}_{i_4}^{\varepsilon_4}$ beginnt, so daß $\mathfrak{x}_{i_4}^{\varepsilon_4} \neq \mathfrak{x}_{i_3}^{-\varepsilon_3}$ ist [2]). Dann folgt aus (4):

$$\mathfrak{z}_1 \mathfrak{x}_{i_1} \mathfrak{z}_2 J'(\{\mathfrak{z}_1 \mathfrak{x}_i \mathfrak{z}_2\}) = \mathfrak{z}_1 \mathfrak{x}_{i_1} J'(\{\mathfrak{x}_i\}) \mathfrak{z}_2 \quad \text{oder} \quad J'(\{\mathfrak{z}_1 \mathfrak{x}_i \mathfrak{z}_2\}) = \mathfrak{z}_2^{-1} J'(\{\mathfrak{x}_i\}) \mathfrak{z}_2.$$

---

[1]) Genauer dürften wir nur voraussetzen, daß $J'(\cdot)$ nicht mit $\mathfrak{x}_{i_1}^{-\varepsilon_1}$ beginnt; doch erweist es sich unten als unmöglich, daß $J'(\cdot)$ mit $\mathfrak{x}_{i_1}^{\varepsilon_1}$ beginnt.

[2]) Hier ist wieder in entsprechender Modifikation die Anm. [1]) anzuwenden.

Setzen wir hier (5) ein, so ergibt sich:

$$(\mathfrak{d}_1 \mathfrak{x}_{i_2} \mathfrak{d}_2)^{\varepsilon_2} (\mathfrak{d}_1 \mathfrak{x}_{i_3} \mathfrak{d}_2)^{\varepsilon_3} J''(\,\cdot\,) = \mathfrak{d}_2^{-1} \mathfrak{x}_{i_2}^{\varepsilon_2} \mathfrak{x}_{i_3}^{\varepsilon_3} J''(\,\cdot\,) \mathfrak{d}_2$$

und hieraus folgt wie oben sukzessive:

$$\varepsilon_2 = -1, \quad \varepsilon_3 = +1,$$

so daß sich:

$$J(\,\cdot\,) = \mathfrak{x}_{i_1} \mathfrak{x}_{i_2}^{-1} \mathfrak{x}_{i_3} J''(\,\cdot\,)$$

ergibt.

Analog weiter schließend erhält man:

$$J(\,\cdot\,) = \mathfrak{x}_{i_1} \mathfrak{x}_{i_2}^{-1} \mathfrak{x}_{i_3} \mathfrak{x}_{i_4}^{-1} \mathfrak{x}_{i_5} \cdots \mathfrak{x}_{i_{m-1}}^{-1} \mathfrak{x}_{i_m}, \tag{6}$$

wo stets $i_k \neq i_{k+1}$ und notwendig $m > 1$ und ungerade ist.

Sei $m = 2l + 1$, $l \geqq 1$.

Dann ist unser Satz bereits für $l = 1$ bewiesen; sei er auch für $l - 1$ bewiesen; es ist $J(\,\cdot\,) = \bar{J}(\,\cdot\,) \mathfrak{x}_{i_{m-1}}^{-1} \mathfrak{x}_{i_m}$, wo also n. V. $\bar{J}$ bereits rational und durch Einsetzen aus $F(\,\cdot\,)$ aufgebaut ist; dann ist:

$$J(\,\cdot\,) = F[\bar{J}(\,\cdot\,), \mathfrak{x}_{i_{m-1}}, \mathfrak{x}_{i_m}],$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Bemerkung: Daß $F(\,\cdot\,)$ in speziellen Fällen kein vollständiges Invariantensystem ist, zeigt das folgende Beispiel:

$\mathfrak{G}$ sei *Abel*sch und werde durch $\mathfrak{a}_i$ mit $\mathfrak{a}_i^2 = 1$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ erzeugt. Dann wird auch

$$J[\{\mathfrak{x}_i\}] = \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_3 \mathfrak{x}_4$$

durch A isomorph abgebildet; denn die allgemeine ähnliche Abbildung ist:

$$\mathfrak{x} \to \alpha(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}\mathfrak{d};$$

also ist:

$$J[\{\alpha(\mathfrak{x}_i)\}] = \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_3 \mathfrak{x}_4 \mathfrak{d}^4 = \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_3 \mathfrak{x}_4 \mathfrak{d} = \alpha[J(\{\mathfrak{x}_i\})],$$

und $J(\,\cdot\,)$ hat nicht die Form (6). Übrigens gilt unser Satz 2 auch für *Abel*sche Gruppen mit Elementen unendlich hoher Ordnung.

§ 2. Die Scharen.

Definition 2: *Eine Teilmenge $\mathfrak{S}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt dann und nur dann eine Schar, wenn $\mathfrak{S}$ mit den Elementen $\mathfrak{a}_i (i = 1, 2, 3)$ stets auch das Element $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2^{-1} \mathfrak{a}_3$ enthält.*

Satz 3: 1. *Eine Schar $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{S}$ die Identität von $\mathfrak{G}$ enthält* [1]).

2. *Eine die Identität enthaltende Teilmenge $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann eine Schar, wenn sie eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist.*

3. *Eine Teilmenge $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann eine Schar in $\mathfrak{G}$, wenn es eine Untergruppe $\mathfrak{S}_r$ bezw. $\mathfrak{S}_l$ von $\mathfrak{G}$ gibt, so daß $\mathfrak{S}$ rechts- bezw. linksseitige Restklasse nach $\mathfrak{S}_r$ bezw. $\mathfrak{S}_l$ ist. $\mathfrak{S}_r$ bezw. $\mathfrak{S}_l$ sind hierdurch und durch $\mathfrak{S}$ eindeutig bestimmt.*

Beweis: I. Eine Teilmenge $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, wenn sie mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ auch $\mathfrak{a}^{-1}$ und $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ enthält; sie enthält also notwendig $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} = 1$ und mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ auch $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}$.

---

[1]) Führt man den Scharbegriff abstrakt ein, wie es *Prüfer*, l. c. p. 170 tut, indem man unter einer Schar ein Elementesystem versteht, in dem je drei Elemente $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ eindeutig ein viertes $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}^{-1}\,\mathfrak{c}$ bestimmen, so daß I. $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, II. $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c})\,\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{e} = \mathfrak{a}\,(\mathfrak{d}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{b})^{-1}\mathfrak{e} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}(\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{e}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{e}$, III. die Gl. $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c} = \mathfrak{d}$ nach jedem der Elemente $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ auf nur eine Weise auflösbar ist — die Lösbarkeit überhaupt läßt sich beweisen —, so kann man von der Schar jederzeit zur Gruppe übergehen, indem man irgendein festes Element $\mathfrak{o}$ als Einheit auszeichnet und als Gruppenkomposition $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{o}^{-1}\mathfrak{b}$ einführt.

Enthält umgekehrt eine Schar $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{G}$ auch die Identität, so enthält sie mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ auch $\mathfrak{a} \cdot 1^{-1} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und $1 \cdot \mathfrak{a}^{-1} \cdot 1 = \mathfrak{a}^{-1}$.

Damit sind 1. und 2. bewiesen; 2. folgt übrigens auch aus 3.

II. Ist $\mathfrak{S}$ Restklasse nach $\mathfrak{S}_r$ bezw. $\mathfrak{S}_l$, d. h. $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_r \mathfrak{a}$ bezw. $\mathfrak{S} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{S}_l$, so enthält $\mathfrak{S}$ mit drei Elementen $\mathfrak{x}_i \mathfrak{a}$ bezw. $\mathfrak{b}\,\mathfrak{x}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, wo $\mathfrak{x}_i \varepsilon \mathfrak{S}_r$ bezw. $\mathfrak{x}_i \varepsilon \mathfrak{S}_l$ gilt, auch $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{a}(\mathfrak{x}_2 \mathfrak{a})^{-1} \mathfrak{x}_3 \mathfrak{a} = \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2^{-1} \mathfrak{x}_3 \mathfrak{a}$ bezw. $\mathfrak{b}\,\mathfrak{x}_1 (\mathfrak{b}\,\mathfrak{x}_2)^{-1} \mathfrak{b} \mathfrak{x}_3 = \mathfrak{b} \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2^{-1} \mathfrak{x}_3$, da ja $\mathfrak{S}_l$ und $\mathfrak{S}_r$ Gruppen, also Scharen sind. Ist umgekehrt $\mathfrak{S}$ eine Schar und $\mathfrak{a} \varepsilon \mathfrak{S}$ beliebig, aber fest, so läßt sich jedes Element von $\mathfrak{S}$ in die Form $\mathfrak{x}\,\mathfrak{a}$ bringen; die Gesamtheit $\mathfrak{S}_r$ dieser $\mathfrak{x}$ enthält die Identität, ist eine Schar, also eine Gruppe und $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_r \mathfrak{a}$; analog findet man $\mathfrak{S}_l$.

Zusatz: *$\mathfrak{G}$ selbst und jedes Element $\mathfrak{a} \varepsilon \mathfrak{G}$ sind Scharen in $\mathfrak{G}$.*

Definition 3: *Unter rechts- bezw. linksähnlichen Abbildungen von $\mathfrak{G}$ auf sich verstehen wir alle und nur die Abbildungen: $\mathfrak{x} \to \alpha(\mathfrak{x})$ derart, daß es ein nur von α abhängiges $\mathfrak{z}$ gibt, so daß für alle $\mathfrak{x}$*

$$\alpha(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}\,\mathfrak{z} \quad \textit{bezw.} \quad \alpha(\mathfrak{x}) = \mathfrak{z}\,\mathfrak{x}$$

gilt.

Ist P die Gruppe aller rechts-, Λ die aller linksähnlichen Abbildungen von $\mathfrak{G}$ auf sich, so sind P und Λ Untergruppen von A; weiter sind P und Λ einfach transitiv, d. h. zu jedem Elementepaar $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{G}$ gibt es eine und nur eine Abbildung aus P, ebenso aus Λ, die $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{b}$ überführt, nämlich:

$$\mathfrak{x} \to \alpha(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}\,\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b} \quad \text{bzw.}$$
$$\mathfrak{x} \to \alpha(\mathfrak{x}) = \mathfrak{b}\,\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{x}.$$

Satz 4: *Eine Teilmenge $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann eine Schar in $\mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{S}$ bei allen rechts- und ebenso bei allen linksähnlichen Abbildungen entweder in sich oder in ein fremdes System übergeht.*

Beweis: A. Sei $\mathfrak{S}$ eine Schar und $\alpha : \mathfrak{x} \to \mathfrak{x}\mathfrak{a}$ eine rechtsähnliche Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf sich. α sei derart, daß ein Element $\mathfrak{b} \varepsilon \mathfrak{S}$ bei α in $\mathfrak{b}\mathfrak{a} \varepsilon \mathfrak{S}$ übergeht; ist dann $\mathfrak{c} \varepsilon \mathfrak{S}$ beliebig, so ist, da $\mathfrak{S}$ eine Schar ist, auch $\mathfrak{c}\mathfrak{b}^{-1}(\mathfrak{b}\mathfrak{a}) \varepsilon \mathfrak{S}$, d. h. mit $\mathfrak{c}$ gehört auch $\mathfrak{c}\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{S}$. Also wird $\mathfrak{S}$ durch α auf sich abgebildet, wenn nur das Bild eines Elements $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{S}$ wieder in $\mathfrak{S}$ gelegen ist.

B. Erfülle jetzt die Teilmenge $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$ die Bedingung unseres Satzes; seien $\mathfrak{a}_i \varepsilon \mathfrak{S}$ $(i = 1, 2, 3)$ beliebig; dann gibt es eine rechtsähnliche Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf sich, bei der $\mathfrak{a}_2$ in $\mathfrak{a}_3$ und also nach Voraussetzung $\mathfrak{S}$ in sich übergeht; dies leistet

$$\alpha : \mathfrak{x} \to \mathfrak{x}\,\mathfrak{a} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_2^{-1}\mathfrak{a}_3.$$

Notwendig ist dann auch

$$\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2^{-1} \mathfrak{a}_3$$

in $\mathfrak{S}$ enthalten, also $\mathfrak{S}$ eine Schar.

Definition 4: *Sind $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ zwei Scharen aus $\mathfrak{G}$, so heißt $\mathfrak{S}_1$ dann und nur dann Nebenschar bezw. Rechts- bezw. Linksnebenschar von $\mathfrak{S}_2$, wenn es eine ähnliche, bezw. eine rechts- bezw. eine linksähnliche Abbildung von $\mathfrak{G}$ gibt, bei der $\mathfrak{S}_1$ in $\mathfrak{S}_2$ übergeht.*

Da A, P und Λ Gruppen sind, sind die hier definierten Beziehungen zwischen Scharen reflexiv, symmetrisch und transitiv. Aus Satz 3 sowie dem in Anschluß an Definition 3 und 4 Bemerkten folgt der

Satz 5: *Dann und nur dann ist eine Teilmenge $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$ Schar in $\mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{S}$ durch eine rechts- bezw. linksähnliche Abbildung aus einer Untergruppe von $\mathfrak{G}$ hervorgeht, d. h. wenn $\mathfrak{S}$ Rechts- bezw. Linksnebenschar einer Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist.*

Da eine Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ ja die Identität enthält, so geht bei einer rechts- bezw. linksähnlichen Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf sich, bei der die Identität in $\mathfrak{a} \varepsilon \mathfrak{G}$ übergeht,

$$\mathfrak{U} \to \mathfrak{U}\,\mathfrak{a} \quad \text{bezw.} \quad \mathfrak{a}\,\mathfrak{U}$$

über, welche Mengen nach Satz 3_3 Scharen in $\mathfrak{G}$ sind.

Zusatz: *Ist $\mathfrak{S}$ eine Schar in $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{T}$ eine in $\mathfrak{S}$, so ist eine Rechts- oder Linksnebenschar von $\mathfrak{T}$ entweder ganz in $\mathfrak{S}$ enthalten oder zu $\mathfrak{S}$ fremd.*

Dies folgt aus Satz 4 und Satz 5.

Satz 6: *Dann und nur dann ist $\mathfrak{S}_1$ Rechtsnebenschar von $\mathfrak{S}_2$, wenn*

$$\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_1^{-1} \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_2 \quad \textit{oder} \quad \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_2^{-1} \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_1,$$

Linksnebenschar, wenn

$$\mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_1^{-1} \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2 \quad \textit{oder} \quad \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2^{-1} \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_1 \quad \textit{ist}\ [1]).$$

Beweis: Wegen Definition 4 ist $\mathfrak{S}_1$ dann und nur dann Rechtsnebenschar von $\mathfrak{S}_2$, wenn

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2\,\mathfrak{a} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_1\,\mathfrak{a}^{-1} \quad \text{ist.}$$

Wegen Satz 3 oder Satz 5 ist $\mathfrak{S}_1$ dann und nur dann eine Schar in $\mathfrak{G}$, wenn es eine Untergruppe $\mathfrak{S}_r$ von $\mathfrak{G}$ gibt, so daß

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_r\,\mathfrak{b}, \quad \text{also} \quad \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_r\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}^{-1} \quad \text{ist.}$$

Dann ist:

$$\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_1^{-1} \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_r\,\mathfrak{b}\,(\mathfrak{S}_r\,\mathfrak{b})^{-1} \mathfrak{S}_r\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{S}_r\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}^{-1} \mathfrak{S}_r^{-1} \mathfrak{S}_r\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{S}_r\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{S}_2.$$

Ebenso folgen die übrigen Formeln.

Definition 5: *Eine Schar $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{G}$ heißt dann und nur dann normal, wenn sie bei allen ähnlichen Abbildungen von $\mathfrak{G}$ auf sich entweder in sich oder in ein fremdes System übergeht.*

Satz 7: 1. *Jede Nebenschar einer in $\mathfrak{G}$ normalen Schar $\mathfrak{S}$ ist zugleich Rechts- und Linksnebenschar von $\mathfrak{S}$* [2]).

2. *Dann und nur dann ist die Schar $\mathfrak{S}$ normal in $\mathfrak{G}$, wenn sie Nebenschar eines Normalteilers* [3]) *von $\mathfrak{G}$ ist.*

Beweis: Sei zunächst $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$; dann geht $\mathfrak{N}$ bei allen inneren Automorphismen von $\mathfrak{G}$ in sich über, d. h. $\mathfrak{a}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{N}$ für jedes $\mathfrak{a} \varepsilon \mathfrak{G}$. Ist jetzt $\alpha : \mathfrak{x} \to \mathfrak{a}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{b}$ irgendeine ähnliche Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf sich, so bildet sie $\mathfrak{N}$ wegen $\mathfrak{a}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{a}^{-1}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{N}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ auf die gleiche Schar $\mathfrak{N}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ ab wie die rechtsähnliche Abbildung ϱ: $\mathfrak{x} \to \mathfrak{x}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$. Also folgt aus Satz 4, daß ein Normalteiler eine in $\mathfrak{G}$ normale Schar ist.

Ist weiter $\mathfrak{S}$ Nebenschar eines Normalteilers $\mathfrak{N}$, d. h. $\mathfrak{S} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{N}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$, so ist eine Nebenschar $\mathfrak{S}_1$ von $\mathfrak{S}$

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{c}\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{d} = \mathfrak{c}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{d} = \mathfrak{N}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{d} = \mathfrak{S}\,\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{a}^{-1}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}$$

Rechtsnebenschar von $\mathfrak{S}$, woraus wegen Satz 4 und Satz 5 folgt, daß $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{G}$ normal ist. Ist umgekehrt $\mathfrak{S}$ normal in $\mathfrak{G}$ und wegen Satz 3 $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_r\,\mathfrak{a}$, wo $\mathfrak{S}_r$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist, so ist notwendig $\mathfrak{S}_r$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Wäre nämlich für irgendein $\mathfrak{b} \varepsilon \mathfrak{G}$

---

[1]) Dies Kriterium legt *Prüfer*, l. c. p. 171 als Definition der Nebenschar zu Grunde.

[2]) Diese Bedingung ist aber nicht hinreichend für Normalität; dies ergibt sich aus dem folgenden Satz: Ist $\mathfrak{G}$ eine endliche Gruppe, $\mathfrak{U}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so gibt es eine Teilmenge von $\mathfrak{G}$, die gleichzeitig für rechts- und linksseitige Zerlegung von $\mathfrak{G}$ in Restklassen nach $\mathfrak{U}$ vollständiges Repräsentantensystem ist; cf. *G. A. Miller*: Quart. J. of Math. V. 41 (1910), p. 382 und *B. L. v. d. Waerden*: Hamb. Abhdlg. V (1926), p. 185.

[3]) $\cdot = \cdot$ invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$.

$$\mathfrak{b}^{-1}\,\mathfrak{S}_r\,\mathfrak{b} \neq \mathfrak{S}_r\,,$$

so wäre auch

$$\mathfrak{b}^{-1}\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{a}^{-1}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^{-1}\,\mathfrak{S}_r\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a} \neq \mathfrak{S}$$

und hätte mit $\mathfrak{S}$ das Element $\mathfrak{a}$ gemein. Damit ist 2. vollständig bewiesen.

Hieraus und aus dem oben Gezeigten folgt 1.

Satz 8: *Sei $\mathfrak{S}$ eine Schar in $\mathfrak{G}$;*

1. *die Gesamtheit $G(\mathfrak{S})$ der Nebenscharen von $\mathfrak{S}$ bildet ein Gruppoid* [1]),
2. *die $M(\mathfrak{S})$ der Rechtsnebenscharen von $\mathfrak{S}$ eine Mischgruppe* [2]);
3. *dann und nur dann ist $G(\mathfrak{S}) = M(\mathfrak{S})$ eine Gruppe, wenn $\mathfrak{S}$ normal in $\mathfrak{G}$ ist* [3]).

Hierbei existiere das Produkt der beiden Scharen $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ dann und nur dann, wenn die Produkte der Elemente der Faktoren eindeutig eine Schar $\mathfrak{S}_{12}$ bestimmen, der sie angehören, und wir setzen dann:

$$\mathfrak{S}_1\,\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_{12}\,.$$

Beweis: Sei $\mathfrak{T}$ irgendeine Schar aus $G(\mathfrak{S})$; dann ist die nach Satz 3_3 existierende Untergruppe

$$\mathfrak{T}_r \text{ mit } \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_r\,\mathfrak{a} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{T}_l \text{ mit } \mathfrak{T} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{T}_l$$

eine Links- bezw. Rechtseinheit von $\mathfrak{T}$; denn es ist: $\mathfrak{T}_r\,\mathfrak{T} = \mathfrak{T}\,\mathfrak{T}_l = \mathfrak{T}$.

Weiter ist jede in $G(\mathfrak{S})$ auftretende Untergruppe Rechts- und Linkseinheit für gewisse Scharen aus $G(\mathfrak{S})$.

Schließlich gehen alle Untergruppen aus $G(\mathfrak{S})$ aus einer durch innere Automorphismen hervor.

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beliebige Scharen aus $G(\mathfrak{S}) = G$ und sei $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$ bildbar.

Weiter sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{A}_l$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_r\,\mathfrak{b}$; also ist $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{A}_l\cdot\mathfrak{B}_r\,\mathfrak{b}$ eine bestimmte Schar, die aber die Scharen $\mathfrak{a}\,\mathfrak{A}_l\,\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}\,\mathfrak{B}_r\,\mathfrak{b}$ enthält, da $\mathfrak{A}_l$ und $\mathfrak{B}_r$ Gruppen sind. Da $\mathfrak{a}\,\mathfrak{A}_l\,\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}\,\mathfrak{B}_r\,\mathfrak{b}$ Nebenscharen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind, so muß $\mathfrak{a}\,\mathfrak{A}_l\,\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{B}_r\,\mathfrak{b} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{B}$, also $\mathfrak{A}_l = \mathfrak{B}_r$ sein; $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind also dann und nur dann komponierbar, wenn die Rechtseinheit $\mathfrak{A}_l$ von $\mathfrak{A}$ gleich der Linkseinheit $\mathfrak{B}_r$ von $\mathfrak{B}$ ist.

Weiter sei $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{C}$. Dann ist also $\mathfrak{A} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{A}_l$, $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{A}_l\,\mathfrak{b}_i$, mithin $\mathfrak{C} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{A}_l\,\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}\,\mathfrak{A}_l\,\mathfrak{b}_2$, d. h. $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2$.

Ebenso zeigt man, daß aus $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_2\,\mathfrak{B}$ auch $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$ folgt.

Damit ist auch gezeigt, daß unsere Rechts- und Linkseinheiten die einzigen sind. Sei weiter $(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B})\cdot\mathfrak{C}$ bildbar; dann ist nach obigem: $\mathfrak{A} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{A}_l$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_l\,\mathfrak{b}$

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{A}_l\,\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,(\mathfrak{b}^{-1}\,\mathfrak{A}_l\,\mathfrak{b}),$$

also $\mathfrak{C} = (\mathfrak{b}^{-1}\,\mathfrak{A}_l\,\mathfrak{b})\mathfrak{c}$, d. h.

$$(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B})\,\mathfrak{C} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}(\mathfrak{b}^{-1}\,\mathfrak{A}_l\,\mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{A}_l\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}.$$

Weiter ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{b}\,(\mathfrak{b}^{-1}\,\mathfrak{A}_l\,\mathfrak{b})$, also $\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C} = \mathfrak{b}\,(\mathfrak{b}^{-1}\,\mathfrak{A}_l\,\mathfrak{b})\,\mathfrak{c} = \mathfrak{A}_l\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}) = \mathfrak{a}\,\mathfrak{A}_l\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$, d. h. $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B})\,\mathfrak{C} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\,\mathfrak{C})$.

Schließlich sind $\mathfrak{A}_l\,\mathfrak{a}_l^{-1}$ und $\mathfrak{a}_r^{-1}\,\mathfrak{A}_r$ die beiden Inversen von $\mathfrak{A} = \mathfrak{a}_l\,\mathfrak{A}_l = \mathfrak{A}_r\,\mathfrak{a}_r$, wo $\mathfrak{A}_l$, $\mathfrak{A}_r$ Gruppen sind.

2. und 3. zeigt man analog.

---

[1]) Im Sinne von *H. Brandt*: Math. Ann., Bd. 96 (1927), p. 360 ss; cf. auch *F. K. Schmidt*: Sitz.-Ber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl. 1927, 8. Abh., p. 91—103, bes. p. 95.

[2]) Im Sinne von *A. Loewy*: Journal f. d. reine u. angewandte Math., Bd. 157 (1927), p. 239—254 bes. p. 247; cf. auch *R. Baer*: Zur Einordnung der Theorie der Mischgruppen in die Gruppentheorie; Sitz.-Ber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl. 1928 (4).

[3]) cf. z. B. *A. Loewy*: Weber-Festschrift 1912, bes. p. 204—205.

§ 3. Automorphismen von Scharen und Gruppen.

Verstehen wir unter A die Gruppe der ähnlichen, unter P die der rechts-, unter Λ die der linksähnlichen Abbildungen von $\mathfrak{G}$, so gilt

Satz 9: 1. $\mathsf{A} = \mathsf{P} \vee \Lambda$.

2. *Jedes Element von* P *ist mit jedem Element von* Λ *vertauschbar.*

3. $\mathsf{P} \frown \Lambda$ *enthält alle und nur die Elemente aus* P *und* Λ, *die die Identität von* $\mathfrak{G}$ *in ein Element des Zentrums* [1]) *von* $\mathfrak{G}$ *überführen.*

Beweis: Da $a_1 \mathfrak{x} a_2 = (a_1 \mathfrak{x}) a_2 = a_1 (\mathfrak{x} a_2)$ ist, so gelten 1. und 2.

Ist weiter $a_1 \mathfrak{x} = \mathfrak{x} a_2$ für alle $\mathfrak{x}$, so folgt, wenn man speziell $\mathfrak{x} = 1$ setzt, $a_1 = a_2 = a$, also gilt $a \mathfrak{x} = \mathfrak{x} a$ für alle $\mathfrak{x}$, womit auch 3. gezeigt ist.

Satz 10: *Ist* K *die Untergruppe von* A, *die alle inneren Automorphismen:* $\mathfrak{x} \to a \mathfrak{x} a^{-1}$ *von* $\mathfrak{G}$ *enthält, so sind* P *und* Λ *zu* $\mathfrak{G}$ *isomorph* [2]), *und die Elemente von* P [*ebenso die von* Λ] *bilden ein vollständiges Repräsentantensystem für die Restklassen von* A *nach* K.

Beweis: Sei $\alpha_i \varepsilon \mathsf{A} : \mathfrak{x} \to a_i \mathfrak{x} b_i$ $(i = 1, 2)$, so ist:

$$\alpha_1 \alpha_2 : \mathfrak{x} \to a_2 a_1 \mathfrak{x} b_1 b_2 \quad \text{und} \quad \alpha_1^{-1} : \mathfrak{x} \to a_1^{-1} \mathfrak{x} b_1^{-1}.$$

Ordnen wir α_i das Element b_i oder a_i^{-1} zu — eine der beiden Zuordnungen festgehalten —, so ist mit

$$\alpha_i' = b_i \quad \text{bzw.} = a_i^{-1} \qquad \text{auch [3])}$$
$$(\alpha_1 \alpha_2)' = b_1 b_2 \quad \text{bezw.} = (a_2 a_1)^{-1} = a_1^{-1} a_2^{-1}$$
$$\text{und} \quad (\alpha_1^{-1})' = b_1^{-1} \quad \text{bezw.} \quad a_1,$$

woraus unser Satz für P und Λ folgt. Entsprechend folgt die letzte Behauptung auf Grund der Zuordnung: $\alpha_i' = a_i b_i$

Verstehen wir unter Σ die Gruppe der Scharautomorphismen von $\mathfrak{G}$, unter Γ die der Gruppenautomorphismen von $\mathfrak{G}$, so gilt:

Satz 11: 1. Γ *ist eine Untergruppe von* Σ.

2. *Zwei Elemente aus* Σ *gehören dann und nur dann zur gleichen Klasse nach* Γ, *wenn sie die Identität aus* $\mathfrak{G}$ *in das gleiche Element aus* $\mathfrak{G}$ *überführen.*

3. $\Sigma = \mathsf{P} \vee \Gamma = \Lambda \vee \Gamma = \mathsf{A} \vee \Gamma$.

4. A *ist Normalteiler von* Σ.

5. $\mathsf{K} = \mathsf{A} \frown \Gamma$.

Beweis: 1. folgt daraus, daß $F(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) = \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2^{-1} \mathfrak{x}_3$ ein rationaler Ausdruck in den $\mathfrak{x}_i$ ist.

2. folgt aus dem folgenden

Hilfssatz: *Dann und nur dann gehört ein Element aus* Σ *zu* Γ, *wenn es die Identität aus* $\mathfrak{G}$ *in sich überführt.*

Beweis: Daß jeder Gruppenautomorphismus die Identität in sich überführt, ist bekannt; sei umgekehrt σ: $\mathfrak{x} \to \sigma(\mathfrak{x})$ ein solcher Scharautomorphismus von $\mathfrak{G}$, d. h. $\sigma(1) = 1$.

Dann gilt:

$$F(\mathfrak{x}_1, 1, \mathfrak{x}_2) = \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \quad \text{und}$$
$$F(\sigma(\mathfrak{x}_1), \ \sigma(1), \ \sigma(\mathfrak{x}_2)) = \sigma(\mathfrak{x}_1) \cdot \sigma(\mathfrak{x}_2) = \sigma[F(\mathfrak{x}_1, 1, \mathfrak{x}_2)] = \sigma(\mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{x}_2),$$

d. h. $\sigma \varepsilon \Gamma$.

---

[1]) cf. z. B. *A. Speiser*: Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 2. Aufl. Berlin 1927, p. 30.

[2]) Dies ist im wesentlichen der *Cayley*sche Satz; cf. z. B. *A. Speiser*, l. c. p. 25.

[3]) α' ist das Bild von $\alpha \ \varepsilon \ \mathsf{A}$ in $\mathfrak{G}$.

Jetzt folgt 3. aus 2. unmittelbar, da P und Λ einfach transitiv sind und also in jeder Klasse von Σ nach Γ sich genau ein Element von P oder Λ findet.

Um 4. zu zeigen, haben wir

$$\sigma \mathsf{A} \sigma^{-1} = \mathsf{A}$$

wegen 3. nur für $\sigma \varepsilon \Gamma$ zu zeigen.

Sei $\alpha \varepsilon \mathsf{A} : \mathfrak{x} \to \alpha(\mathfrak{x}) = \mathfrak{a}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{b}$; dann bewirkt:

$$\sigma\alpha\sigma^{-1} : \mathfrak{x} \to \sigma(\mathfrak{x}) \to \mathfrak{a}\,\sigma(\mathfrak{x})\,\mathfrak{b} \to \sigma^{-1}[\mathfrak{a}\,\sigma(\mathfrak{x})\,\mathfrak{b}] = \sigma^{-1}(\mathfrak{a})\,\sigma^{-1}(\sigma(\mathfrak{x}))\,\sigma^{-1}(\mathfrak{b}) = \sigma^{-1}(\mathfrak{a})\,\mathfrak{x}\,\sigma^{-1}(\mathfrak{b}),$$

also $\sigma\alpha\sigma^{-1} \varepsilon \mathsf{A}$ für alle $\alpha \varepsilon \mathsf{A}$.

5. ist trivial.

Anhang: Scharen in Körpern.

Sei K ein Körper und M ein ausgezeichnetes Teilsystem von K.

Wir betrachten die Gruppe T aller Abbildungen:

$$\alpha : x \to \alpha(x) = ax + b \quad \text{für alle} \quad x \varepsilon K,$$

wo $a \varepsilon M$, $b \varepsilon K$ beliebig ist.

1. *Da* T *eine Gruppe sein soll, muß* M *eine multiplikative Gruppe sein.*

Da T nämlich die Identität: $x \to 1 \cdot x$ enthalten muß, so muß M die 1 enthalten. $\alpha_i(x) = a_i x + b$ $(i = 1, 2)$ zieht

$$\alpha_1\alpha_2(x) = a_1(a_2 x + b_2) + b_1 = a_1 a_2 x + a_1 b_2 + b_1,$$

also $a_1 a_2 \varepsilon M$ mit $a_i \varepsilon M$, und

$$\alpha_i^{-1}(x) = a_i^{-1} x + \left(-\frac{b_i}{a_i}\right),$$

also $a_i^{-1} \varepsilon M$ mit $a_i \varepsilon M$ nach sich.

Unter einer Schar S *in* K *verstehen wir ein Teilsystem von* K, *das bei* T *entweder in sich oder in ein fremdes System übergeht.*

2. *Eine Schar* S *in* K *ist eine additive Restklasse nach einem Ideal in* K; *eine Schar ist dann und nur dann ein Ideal, wenn sie die Null enthält.*

Enthält S die Null, so ist mit x auch $x + b$ Element von S, wenn $b \varepsilon S$ ist, und mit $x \varepsilon S$ auch $ax \varepsilon S$ für $a \varepsilon M$. Daraus folgen die übrigen Behauptungen.

Freiburg i. Br., d. 14. III. 1928.

Eingegangen 27. März 1928.

Zur Topologie der Gruppen.

Von *Reinhold Baer* in Halle a. S.

Inhalt.

		Seite
	Einleitung	208
§ 1.	Offene und abgeschlossene Scharen in topologischen Gruppenräumen	209
§ 2.	Die geordneten Gruppen	212
	Anhang I: Charakterisierung des Körpers der reellen Zahlen	217
§ 3.	S-Gruppen und ihre Unter-S-Gruppen	218
§ 4.	Erweiterung von S-Gruppen zu vollständig abgeschlossenen S-Gruppen	220
	Anhang II: Die nicht-Archimedisch geordneten Körper	223
	Anhang III: Körper der Potenzreihen in einer Veränderlichen	225
	Anhang IV: Die unarchimedisch bewerteten Körper	225

Einleitung.

Man hat in letzter Zeit mehrfach die Elemente einer Gruppe $\mathfrak{G}$ als Punkte eines Raumes aufgefaßt, $\mathfrak{G}$ als Raum gedeutet, um dann in diesem „*Gruppenraum*“ Geometrie zu treiben [1]). Dabei werden die wesentlichen geometrischen Beziehungen stets so definiert, daß sich ihre Invarianz gegenüber der Gruppe A der ähnlichen Abbildungen [2]) von $\mathfrak{G}$ auf sich nachweisen läßt.

Wir werden umgekehrt [3]) von dem — topologischen — Gruppenraum verlangen, daß A eine Gruppe topologischer Abbildungen von $\mathfrak{G}$ auf sich ist, bei denen also o. B. d. A. Umgebungen wieder in Umgebungen übergehen sollen. Hierdurch werden alle Verhältnisse recht übersichtlich; wir erhalten als einfache Anwendung unserer Ergebnisse:

---

[1]) 1. *Élie Cartan*: La géométrie des groupes de transformations. Journal de Mathématiques 9. sér. t. 6 (1927), p. 1—120, bes. Ch. I.

2. *F. Leja*: Sur la notion du groupe abstrait topologique. Fund. math. t. 9. (1927), p. 37—44.

3. *H. Kneser*: Die Deformationssätze der einfach zusammenhängenden Flächen. Math. Zeitschr. Bd. 25 (1926), p. 362—372.

4. *O. Schreier*: Abstrakte kontinuierliche Gruppen. Abh. a. d. math. Sem. Hamburg Bd. 4, p. 15—32.

5. *H. Weyl* u. *F. Peter*: Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe. Math. Ann. Bd. 97 (1927), p. 737—755.

Die Abhandlungen 1. und 5. betreiben bereits die „affine und äquiforme Geometrie“ des Gruppenraumes, haben also mit unseren topologischen Fragestellungen wenig Berührung; die Arbeiten 3. und 4. beschränken sich auf die Betrachtung von L-Räumen im Sinne von *Fréchet* (cf. *F. Hausdorff:* Mengenlehre, 2. Aufl. Berlin 1927, p. 230), während 2. im wesentlichen nur nachweist, daß seine topologischen Gruppenräume unseren Anforderungen genügen. Den Terminus „Gruppenraum“ entnehme ich 1.

[2]) Eine Abbildung $\mathfrak{x} \to \alpha(\mathfrak{x})$ von $\mathfrak{G}$ auf sich, wo also $\mathfrak{x}$ alle Elemente von $\mathfrak{G}$ durchläuft, heißt ähnlich, wenn $\alpha(\mathfrak{x}) = \mathfrak{a}\mathfrak{x}\mathfrak{b}$ für alle $\mathfrak{x}$ ist, wo $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ feste Elemente aus $\mathfrak{G}$ sind; cf. die vorstehende Abhandlung von *R. Baer*: Zur Einführung des Scharbegriffs, im folgenden mit BS zitiert.

[3]) Ähnlich *Weyl* und *Peter* l. c., die von ihrer Volumdefinition verlangen, daß A nur volumtreue Abbildungen enthält.

Unter den geordneten Körpern [4]) *ist nur der aller reellen Zahlen eindimensional* [5]), *alle andern sind nulldimensional* [5]) [6]).

Schon das Studium der geordneten Gruppen, das uns zu dem eben genannten Satz führt, legt die Betrachtung einer Sonderklasse von topologischen Gruppenräumen nahe, nämlich solchen, bei denen alle Umgebungen Scharen [7]) sind [8]). Sie sind stets nulldimensional; weiter gelingt es uns zu zeigen, daß sie sich auf eine und im wesentlichen nur auf eine Weise in einen vollständig abgeschlossenen Gruppenraum einbetten lassen; dabei heißt ein Gruppenraum *vollständig abgeschlossen*, wenn er in jedem umfassenderen *topologischen Gruppenraum* abgeschlossen ist [9]). Diese Abschließung geschieht durch Einführung einer sinngemäßen Verallgemeinerung der *Prüfer*schen idealen Elemente [10]), die so in einem neuen Lichte erscheinen.

Bezeichnungen:

Gruppenräume und deren Teilmengen: große deutsche Buchstaben: $\mathfrak{G}, \mathfrak{S}, \ldots$
Elemente von Gruppenräumen: kleine deutsche Buchstaben: $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{x}, \ldots$
Körper: große lateinische Buchstaben: $K, R, \ldots$
Körperelemente: kleine lateinische Buchstaben: $x, a, \ldots$
Systeme von Mengen etc.: große lateinische Buchstaben: $S, M, \ldots$
Abbildungen: kleine griechische Buchstaben: $\alpha = \alpha(\mathfrak{x}), \ldots$
Abbildungsgruppen: große griechische Buchstaben: $\mathsf{A}, \ldots$
$A = B \cdot = \cdot$ die Menge A ist gleich B.
$A < B \cdot = \cdot$ die Menge A ist in B als echter Teil enthalten.
$A - B \cdot = \cdot$ Komplement von B rücksichtlich A $(B \leqq A)$.
$A \frown B \cdot = \cdot$ Durchschnitt von A und B.
$A \vee B \cdot = \cdot$ Vereinigungsgruppe der Gruppen A und B.
$\overline{A} \cdot = \cdot$ abgeschlossene Hülle von A.
$a \varepsilon A \cdot = \cdot a$ ist Element von A.

§ 1. Offene und abgeschlossene Scharen in topologischen Gruppenräumen.

Definition 1: *Eine Gruppe* $\mathfrak{G}$ *heißt eine T-Gruppe, wenn sie ein derartiger topologischer Raum ist* [11]), *daß die Gruppe* A *der ähnlichen Abbildungen* [12]) *von* $\mathfrak{G}$ *auf sich nur topologische Abbildungen von* $\mathfrak{G}$ *auf sich enthält* [13]).

---

[4]) cf. *E. Artin-O. Schreier*: Algebraische Konstruktion reeller Körper. Abh. a. d. math. Sem. Hamburg Bd. V (1926), p. 85 ss. *R. Baer*: Über nicht-Archimedisch geordnete Körper. Sitz.-Ber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss. Math.-nat. Kl. 1927, 8. Abhdlg., p. 3—13, zitiert mit BK.

[5]) Im Sinne von *Urysohn* und *Menger*; cf. z. B.: *P. Alexandroff*: Math. Ann. Bd. 98 (1928), p. 31. *K. Menger*: Dimensionstheorie, Berlin u. Leipzig 1928.

[6]) Dies folgt übrigens schon allein aus dem Studium der Additionsgruppe des geordneten Körpers.

[7]) Im Sinne von *H. Prüfer*: Theorie der Abelschen Gruppen I. Math. Zeitschr. Bd. 20 (1924), p. 165—187, bes. p. 170. Cf. BS; die dort aufgewiesenen Zusammenhänge der Gruppe A mit den Scharen hätten auch schon die Betrachtung dieser Sonderklasse nahegelegt.

[8]) Diese haben sich neuerdings auch für die Körpertheorie wichtig gezeigt. cf. *W. Krull*: Math. Ann. Bd. 100 (1928), p. 687—697. *R. Baer*: Sitz.-Ber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss. Math.-nat. Kl. 1928 (14).

[9]) Der Begriff „vollständig abgeschlossen" hat eine gewisse Verwandtschaft mit dem Begriff „absolut abgeschlossen" bei *P. Alexandroff* und *P. Urysohn*: Zur Theorie der topologischen Räume. Math. Ann. Bd. 92 (1924), p. 258—256, bes. p. 261; ebenso *F. Hausdorff*: Mengenlehre, 2. Aufl., p. 121.

[10]) cf. *H. Prüfer*: Theorie der Abelschen Gruppen II. Math. Zeitschr. Bd. 22 (1925), p. 222—249. bes. p. 223.

[11]) Im Sinne von *F. Hausdorff*: Grundzüge der Mengenlehre, 1. Aufl. Leipzig 1914, p. 213, wonach wir auch die Umgebungsaxiome (A)—(D) zitieren werden.

[12]) cf. Anm. [2]).

[13]) Da die Elemente von A eineindeutige Abbildungen von $\mathfrak{G}$ auf sich sind, so ist also nur zu

Da die Gruppe A der ähnlichen Abbildungen transitiv ist, so ist eine T-Gruppe entweder in sich dicht oder diskret, d. h. jedes ihrer Elemente ist Häufungspunkt[14]) oder keines.

Satz 1: *Eine Schar*[15]) $\mathfrak{S}$ *in der T-Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist dann und nur dann offen*[16]), *wenn es eine Umgebung* [*eines Punktes von* $\mathfrak{S}$] *gibt, die ganz in* $\mathfrak{S}$ *enthalten ist.*

Beweis: Es ist nur das Hinreichen der Bedingung zu zeigen. Sei $\mathfrak{U}(\mathfrak{a})$ eine ganz in $\mathfrak{S}$ enthaltene Umgebung von $\mathfrak{a} \varepsilon \mathfrak{S}$ und sei $\mathfrak{b} \varepsilon \mathfrak{S}$ beliebig; dann gibt es eine rechtsähnliche Abbildung[17]) ϱ: $\mathfrak{x} \to \mathfrak{x}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{G}$ auf sich, bei der $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{U}(\mathfrak{a})$ in eine Umgebung $\mathfrak{U}(\mathfrak{b})$ von $\mathfrak{b}$ übergeht; da bei ϱ aber $\mathfrak{S}$ in sich übergeht[18]), so muß mit $\mathfrak{U}(\mathfrak{a})$ auch $\mathfrak{U}(\mathfrak{b})$ in $\mathfrak{S}$ enthalten sein.

Satz 2: *Jede offene Schar* $\mathfrak{S}$ *in der T-Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist auch abgeschlossen*[19]).

Beweis: Mit $\mathfrak{S}$ sind auch alle Rechtsnebenscharen[20]) von $\mathfrak{S}$ offen; $\mathfrak{G}-\mathfrak{S}$, das Komplement von $\mathfrak{S}$ rücksichtlich $\mathfrak{G}$, ist die Vereinigungsmenge aller von $\mathfrak{S}$ verschiedenen Rechtsnebenscharen von $\mathfrak{S}$, also als Vereinigung offener Mengen selbst offen; $\mathfrak{S}$ ist also Komplement einer offenen Menge, mithin abgeschlossen.

Definition 2: *Eine T-Gruppe ist dann und nur dann eine S-Gruppe, wenn es ein gleichwertiges Umgebungssystem*[21]) *gibt, das nur aus Scharen in* $\mathfrak{G}$ *besteht.*

Dann gilt der

Zusatz: *Jede S-Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist nulldimensional und ein regulärer topologischer Raum*[22]).

Beweis: In jeder Umgebung $\mathfrak{U}(\mathfrak{a})$ eines beliebigen Punktes $\mathfrak{a}$ findet sich eine offene, $\mathfrak{a}$ enthaltende Schar; diese ist aber nach Satz 2 auch abgeschlossen, also $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{a}$ nulldimensional und regulär.

Satz 3: *Die Komponente*[23]) $\mathfrak{C}(\mathfrak{a})$ *eines beliebigen Elementes* $\mathfrak{a}$ *einer T-Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist stets eine normale Schar*[24]) *in* $\mathfrak{G}$ (*für* $\mathfrak{a} = 1$ *ein Normalteiler*).

---

fordern, daß bei Abbildungen aus A offene Mengen in $\mathfrak{G}$ wieder in offene Mengen übergehen; man kann dann o. B. d. A. annehmen, was wir auch stets tun wollen, daß die Umgebungsdefinition in $\mathfrak{G}$ so vorgenommen ist, daß bei Abbildungen aus A Umgebungen wieder in Umgebungen übergehen. Cf. *H. Tietze*: Beiträge zur allgemeinen Topologie I. Math. Ann. Bd. 88 (1923), p. 290—312, bes. p. 294 Nr. 4.

[14]) Wir sagen, wie üblich, $\mathfrak{a}$ ist Häufungspunkt von $\mathfrak{M}$, wenn sich in jeder Umgebung von $\mathfrak{a}$ unendlich viele Elemente von $\mathfrak{M}$ befinden, fordern also nicht die Existenz einer gegen $\mathfrak{a}$ konvergierenden Teilmenge von $\mathfrak{M}$.

[15]) cf. BS. Eine Schar enthält mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ auch $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}$ und ist Restklasse nach einer Untergruppe von $\mathfrak{G}$, ev. selbst eine Untergruppe.

[16]) Eine Menge $\mathfrak{M}$ ist offen, wenn sie mit einem jeden Punkt $\mathfrak{a}$ auch eine ganze Umgebung von $\mathfrak{a}$ enthält.

[17]) cf. BS; die Abbildungen: $\mathfrak{x} \to \mathfrak{x}\mathfrak{a}$ für alle $\mathfrak{x} \varepsilon \mathfrak{G}$ und festes $\mathfrak{a} \varepsilon \mathfrak{G}$ heißen rechtsähnlich, die Abbildungen $\mathfrak{x} \to \mathfrak{a}\mathfrak{x}$ linksähnlich.

[18]) cf. BS, Satz 4.

[19]) Eine Menge $\mathfrak{M}$ ist abgeschlossen, wenn sie alle Häufungspunkte enthält; sie ist dann und nur dann abgeschlossen, wenn ihr Komplement rücksichtlich $\mathfrak{G}$ offen ist.

[20]) Diese sind Restklassen nach der gleichen Untergruppe wie $\mathfrak{S}$, gehen also durch rechtsähnliche Abbildungen aus $\mathfrak{S}$ hervor; cf. BS, Definition 4.

[21]) Zwei Umgebungsdefinitionen heißen „gleichwertig", wenn jede im einen Sinne offene Menge es auch im andern Sinne ist; dies ist dann und nur dann der Fall, wenn in jeder Umgebung eines Punktes $\mathfrak{a}$ des einen Umgebungssystems auch eine Umgebung von $\mathfrak{a}$ des andern Umgebungssystems als Teilmenge enthalten ist und umgekehrt; cf. *H. Tietze*, l. c. p. 293.

[22]) cf. *P. Alexandroff* und *P. Urysohn*: Math. Ann. Bd. 93 (1924), S. 263.

[23]) *F. Hausdorff*: Grundzüge . . . ., p. 245, wo auch die Existenz einer Komponente nachgewiesen wird.

[24]) Jede normale Schar ist Restklasse nach einem Normalteiler von $\mathfrak{G}$; cf. BS, Definition 5 und Satz 7_2.

Beweis: Da es eine und nur eine Komponente $\mathfrak{C}(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}$ gibt[25]), so geht $\mathfrak{C}(\mathfrak{a})$ bei allen topologischen Abbildungen von $\mathfrak{G}$ auf sich entweder in sich oder in ein fremdes System über, da Komponenten in Komponenten übergehen; speziell geht also $\mathfrak{C}(\mathfrak{a})$ bei A entweder in sich oder in ein fremdes System über, ist also eine normale Schar in $\mathfrak{G}$.

Definition 3: *Unter der Inversion ι der Gruppe $\mathfrak{G}$ verstehen wir die Abbildung:*

$$\mathfrak{x} \to \mathfrak{x}^{-1} \text{ für alle } \mathfrak{x} \varepsilon \mathfrak{G}$$

von $\mathfrak{G}$ auf sich.

Satz 4: *Ist $\mathfrak{G}$ eine T-Gruppe derart, daß die Inversion ι eine topologische Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf sich ist*[26]), *so ist die abgeschlossene Hülle*[27]) $\overline{\mathfrak{S}}$ *einer Schar $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{G}$ wieder eine Schar.*

Beweis: 1. Sei $\mathfrak{S}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$; wir zeigen, daß dann auch $\overline{\mathfrak{S}}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist.

Eine topologische Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf sich, die $\mathfrak{S}$ in sich überführt, führt auch $\overline{\mathfrak{S}}$ in sich über; sind $\mathfrak{f} \varepsilon \mathfrak{S}$ und $\mathfrak{a} \varepsilon \overline{\mathfrak{S}}$ beliebig, so führen die ähnlichen Abbildungen:

$$\mathfrak{x} \to \mathfrak{x}\mathfrak{f} \text{ bezw. } \mathfrak{x} \to \mathfrak{f}\mathfrak{x} \text{ für alle } \mathfrak{x} \varepsilon \mathfrak{G}$$

je $\mathfrak{S}$ in sich über, also auch $\overline{\mathfrak{S}}$; also sind $\mathfrak{a}\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}\mathfrak{a}$ ebenfalls Elemente von $\overline{\mathfrak{S}}$, d. h. $\overline{\mathfrak{S}}$ enthält nur vollständige Rechts- und Linksnebenscharen von $\mathfrak{S}$.

Seien jetzt $\mathfrak{a} \varepsilon \overline{\mathfrak{S}}$ und $\mathfrak{b} \varepsilon \overline{\mathfrak{S}}$ beliebig; bei β: $\mathfrak{x} \to \mathfrak{x}\mathfrak{b}$ geht $\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}\mathfrak{b}$ über; da aber nach obigem $\mathfrak{S}\mathfrak{b} \leqq \overline{\mathfrak{S}}$ gilt, so gilt auch $\overline{\mathfrak{S}\mathfrak{b}} \leqq \overline{\mathfrak{S}}$; bei β geht aber $\overline{\mathfrak{S}}$ in $\overline{\mathfrak{S}\mathfrak{b}}$ über; das Bild jedes Elements von $\overline{\mathfrak{S}}$ bei β ist also wieder ein Element von $\overline{\mathfrak{S}}$; also ist mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ auch $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ in $\overline{\mathfrak{S}}$ enthalten.

Da schließlich n. V. die Inversion ι auch eine topologische Abbildung von $\mathfrak{G}$ ist, bei ihr aber $\mathfrak{S}$ in sich übergeht, so geht bei ι auch $\overline{\mathfrak{S}}$ in sich über; mit $\mathfrak{a}$ enthält $\overline{\mathfrak{S}}$ also auch $\mathfrak{a}^{-1}$, d. h. $\overline{\mathfrak{S}}$ ist eine Gruppe.

2. Ist $\mathfrak{S}$ keine Gruppe, so gibt es eine ähnliche Abbildung von $\mathfrak{G}$, bei der $\mathfrak{S}$ in eine Gruppe $\mathfrak{S}_1$ übergeht; hierbei geht die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{S}}$ von $\mathfrak{S}$ in die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{S}_1}$ von $\mathfrak{S}_1$ über; da aber nach dem ad 1. bewiesenen $\overline{\mathfrak{S}_1}$ eine Gruppe ist, so ist $\overline{\mathfrak{S}}$ sicher eine Schar[28]).

Satz 5: *Ist $\mathfrak{G}$ eine T-Gruppe der Eigenschaft:*

(M) *Sind $\mathfrak{A}_i = \{\mathfrak{a}_\nu^{(i)}\}$ zwei Teilmengen von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{a}_i$ ein Hp [$\cdot = \cdot$ Häufungspunkt] von $\{\mathfrak{a}_\nu^{(i)}\}$, so ist $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ ein Hp von $\{\mathfrak{a}_\nu^{(1)}\mathfrak{a}_\nu^{(2)}\}$, wenn nur $\mathfrak{a}_1$ dann und nur dann Hp einer Teilmenge von $\{\mathfrak{a}_\nu^{(1)}\}$ ist, wenn $\mathfrak{a}_2$ Hp der entsprechenden Teilmenge von $\{\mathfrak{a}_\nu^{(2)}\}$ ist, ist weiter die Inversion ι eine topologische Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf sich,*
so ist der Normalisator einer abgeschlossenen Untergruppe von $\mathfrak{G}$ selbst abgeschlossen.

[Die Eigenschaft (M) haben z. B. die *Schreier*schen *L*-Gruppen].

Beweis: Sei $\mathfrak{A}$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{N}$ der Normalisator von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}$. Ist jetzt $\mathfrak{a} \varepsilon \mathfrak{A}$ beliebig, so ist

$$\{\mathfrak{n}\mathfrak{a}\mathfrak{n}^{-1}\} \leqq \mathfrak{A}, \text{ wenn } \mathfrak{n} \varepsilon \mathfrak{N} \text{ ist},$$

und wegen der Eigenschaft von $\mathfrak{G}$, eine *T*-Gruppe zu sein, ist, wenn $\mathfrak{h}$ Hp von $\mathfrak{N}$ ist, $\mathfrak{h}\mathfrak{a}$ Hp von $\mathfrak{N}\mathfrak{a}$; da weiter ι eine topologiche Abbildung von $\mathfrak{G}$ ist, ist $\mathfrak{h}^{-1}$ Hp von $\mathfrak{N}^{-1} = \mathfrak{N}$.

---

[25]) cf. *F. Hausdorff*: Grundzüge . . . . ., p. 246.
[26]) Eine nicht immer erfüllte Voraussetzung; cf. z. B. *H. Kneser*, l. c. p. 366 Anm. [3]).
[27]) cf. *F. Hausdorff*: Mengenlehre, 2. Aufl., p. 115.
[28]) cf. BS, Satz 5.

Wegen (M) ist schließlich

$$\mathfrak{h}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{h}^{-1}\ \text{Hp von}\ \{\mathfrak{n}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{n}^{-1}\} \leqq \mathfrak{A};$$

da aber $\mathfrak{A}$ abgeschlossen ist, so ist also $\mathfrak{h}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{h}^{-1} \varepsilon \mathfrak{A}$ für jedes $\mathfrak{a} \varepsilon \mathfrak{A}$, d. h. $\mathfrak{h} \varepsilon \mathfrak{N}$; $\mathfrak{N}$ ist demnach auch abgeschlossen.

Satz 6: *Ist $\mathfrak{G}$ eine T-Gruppe der Eigenschaft* (M), *$\mathfrak{A}$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathfrak{G}$ und Σ eine Menge von Restklassen von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{A}$, sind weiter $\{\mathfrak{a}_\nu^{(i)}\}$ $(i = 1, 2)$ zwei vollständige Repräsentantensysteme von Σ, so hat dann und nur dann $\{\mathfrak{a}_\nu^{(1)}\}$ einen Hp $\mathfrak{a}_1$ in der Klasse $\mathfrak{A}_0$ von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{A}$, wenn $\{\mathfrak{a}_\nu^{(2)}\}$ einen Hp $\mathfrak{a}_2 \varepsilon \mathfrak{A}_0$ besitzt, vorausgesetzt, daß sie überhaupt einen Hp besitzen.*

Beweis: Wir betrachten die Menge $\mathfrak{B}_i = \{\mathfrak{a}_\nu^{(i)}\}$ mit dem Hp $\mathfrak{a}_i$. Dann ist $\{\mathfrak{a}_\nu^{(1)}\,\mathfrak{a}_\nu^{(2)-1}\} \leqq \mathfrak{A}$ und hat wegen (M) den Hp $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2^{-1}$, der zu $\mathfrak{A}$ gehört, da $\mathfrak{A}$ abgeschlossen ist; ist $\mathfrak{a}_1 \varepsilon \mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2^{-1} \varepsilon \mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{a}_2 \varepsilon \mathfrak{A}_0$, woraus unser Satz folgt.

Zusatz: 1. *Ist $\mathfrak{A}$ eine abgeschlossene Untergruppe der T-Gruppe $\mathfrak{G}$ mit der Eigenschaft* (M), *so gibt es in der Quotientenmischgruppe $\|\mathfrak{G}|\mathfrak{A}\|$* [29]) *eine natürliche Topologie:*

Klassen von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{A}$ haben eine Klasse von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{A}$ zum Hp, wenn es von wenigstens einem vollständigen Repräsentantensystem gilt.

2. *Diese natürliche Topologie ist gegenüber den durch $\mathfrak{G}$ induzierten ähnlichen Abbildungen* [30]) *von $\|\mathfrak{G}|\mathfrak{A}\|$ auf sich invariant.*

3. *Eine Untermischgruppe $\|\mathfrak{B}|\mathfrak{A}\|$ von $\|\mathfrak{G}|\mathfrak{A}\|$* [31]), *nach der sich eine Zerlegung in $\mathfrak{G}$ realisieren läßt* [32]), *ist dann und nur dann in $\|\mathfrak{G}|\mathfrak{A}\|$ abgeschlossen, wenn $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{G}$ abgeschlossen ist.*

Beweis: 1. folgt aus dem Satz 6, 2. daraus, daß die Elemente von $\mathfrak{G}$ ähnliche Abbildungen von $\mathfrak{G}$ induzieren, die topologische Abbildungen von $\mathfrak{G}$ sind, 3. schließlich aus der Definition der natürlichen Topologie in $\|\mathfrak{G}|\mathfrak{A}\|$.

§ 2. Die geordneten Gruppen.

Definition 1: *Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt eine O-Gruppe, wenn ihre Elemente so geordnet sind, daß die ähnlichen Abbildungen die Ordnung erhalten* [33]).

Satz 1: 1. *Die Inversion kehrt die Ordnung der Elemente von $\mathfrak{G}$ um, d. h. aus $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ folgt $\mathfrak{b}^{-1} < \mathfrak{a}^{-1}$.*

2. *In O-Gruppen gibt es keine Elemente endlicher Periode; aus $n < m$ und $\mathfrak{a} > 1$ folgt stets $\mathfrak{a}^n < \mathfrak{a}^m$.*

3. *Eine O-Gruppe ist*

a. *entweder so beschaffen, daß jedes Element einen direkten Vorgänger und einen direkten Nachfolger hat,*

b. *oder es ist möglich, sie zu einer T-Gruppe zu machen, indem man die offenen Intervalle* [34]) *als Umgebungen deutet; dann ist auch die Inversion eine topologische Abbildung und die Gruppe ist überall dicht.*

---

[29]) cf. *R. Baer*: Sitz.-Ber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss. Math.-nat. Kl. 1928 (4), p. 6, Satz 2.

[30]) cf. *R. Baer*: l. c. Anm. [29]), Definition 1.

[31]) cf. *R. Baer*: l. c. Anm. [29]) p. 7, Definition 1.

[32]) cf. *R. Baer*: Sitz.-Ber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss. Math.-nat. Kl. 1928 (5), p. 5, (Z).

[33]) d. h. also, daß die in unserm Sinne ähnlichen Abbildungen auch im mengentheoretischem Sinne ähnlich sein sollen.

[34]) Eine Teilmenge einer geordneten Menge heißt ein Intervall, wenn sie mit zwei Elementen $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ auch alle Elemente $\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{a} < \mathfrak{c} < \mathfrak{b}$ enthält; ein Intervall $\mathfrak{J}$ heißt berandet, wenn es zwei Elemente $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ in $\mathfrak{J}$ derart gibt, daß ein Element $\mathfrak{c}$ dann und nur dann zu $\mathfrak{J}$ gehört, wenn $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{c} \leqq \mathfrak{b}$ ist, sonst offen.

Beweis: 1. Wir betrachten die ähnliche Abbildung: $\mathfrak{x} \to \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{x}\mathfrak{b}^{-1}$; mit $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ gilt also auch $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} = \mathfrak{b}^{-1} < \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}\mathfrak{b}^{-1} = \mathfrak{a}^{-1}$.

2. Wir betrachten die ähnliche Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{x}\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{x} \to \mathfrak{x}\mathfrak{a}^{-1}$; aus $1 < \mathfrak{a}$ folgt dann: $\mathfrak{a} < \mathfrak{a}^2, \mathfrak{a}^2 < \mathfrak{a}^3, \ldots$ und $\mathfrak{a}^{-1} < 1, \mathfrak{a}^{-2} < \mathfrak{a}^{-1}, \ldots$

3 a. Es gebe ein Elementepaar $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ derart, daß $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ und aus $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{c} \leqq \mathfrak{b}$ entweder $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ oder $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ folgt; durch die Abbildung: $\mathfrak{x} \to \mathfrak{x}\mathfrak{a}^{-1}$ geht $\mathfrak{a} \to 1$ und $\mathfrak{b} \to \mathfrak{b}\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{e}$ über; dann ist $\mathfrak{e}^{-1}$ der Vorgänger (wegen 1.), $\mathfrak{e}$ der Nachfolger der Identität von $\mathfrak{G}$; da die Gruppe A der ähnlichen Abbildungen transitiv ist, muß also jedes Element von $\mathfrak{G}$ einen direkten Nachfolger und einen direkten Vorgänger haben.

3 b. Liegt der Fall 3 a nicht vor, so gibt es zwischen irgend zwei Elementen von $\mathfrak{G}$ noch Elemente von $\mathfrak{G}$; die Umgebungsdefinition: *jedes offene Intervall ist Umgebung aller seiner Punkte*, genügt dann den *Hausdorff*schen Umgebungsaxiomen [35]); da weiter die Zwischenbeziehung bei ähnlichen Abbildungen und Inversion erhalten bleibt, so sind dies auch topologische Abbildungen, womit unser Satz völlig bewiesen ist.

Definition 2: *Eine Schar $\mathfrak{S}$ in der T-Gruppe $\mathfrak{G}$ heiße unzerlegbar, wenn*

1. *$\mathfrak{S}$ gleichzeitig offen und abgeschlossen ist* [36]),
2. *jede Schar $\mathfrak{S}'$ in $\mathfrak{S}$, die ebenfalls die Eigenschaft* 1. *in $\mathfrak{G}$ hat, mit $\mathfrak{S}$ identisch ist.*

Satz 2: *Eine O-Gruppe $\mathfrak{G}$ ist*

entweder eine S-Gruppe [37]),

oder es gibt zu jedem $\mathfrak{a} \varepsilon \mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{a}$ enthaltende, unzerlegbare Schar $\mathfrak{N}(\mathfrak{a})$; $\mathfrak{N}(\mathfrak{a})$ ist eine normale Schar in $\mathfrak{G}$ [38]) [39]).

Beweis: Es gebe keine unzerlegbare Schar in $\mathfrak{G}$, d. h. jede offene, ein $\mathfrak{a} \varepsilon \mathfrak{G}$ enthaltende Schar enthält auch eine offene, $\mathfrak{a}$ enthaltende, echte Unterschar. Wir konstruieren eine Kette von Scharen $\mathfrak{S}_\nu$:

1. $\mathfrak{S}_0$ sei ein offenes Intervall und enthalte $\mathfrak{a}$;

2. sei bereits $\mathfrak{S}_\nu$ konstruiert, $\mathfrak{a} \varepsilon \mathfrak{S}_\nu$, $\mathfrak{S}_\nu$ ein offenes Intervall; dann gibt es wenigstens ein $\mathfrak{S}_{\nu+1} < \mathfrak{S}_\nu$ mit $\mathfrak{a} \varepsilon \mathfrak{S}_{\nu+1}$, das ebenfalls offen ist; o. B. d. A. sei $\mathfrak{S}_{\nu+1}$ ein offenes Intervall;

3. sei bereits $\mathfrak{S}_\mu$ für alle $\mu < \nu$ (μ, ν sind — ev. transfinite — Ordinalzahlen) konstruiert, so daß $\mathfrak{S}_{\mu_1} < \mathfrak{S}_{\mu_2}$ für $\mu_1 < \mu_2$, $\mathfrak{S}_\mu$ ein offenes Intervall, Schar und $\mathfrak{a} \varepsilon \mathfrak{S}_\mu$.

$\mathfrak{S}_\nu$ ist der Durchschnitt aller $\mathfrak{S}_\mu$ mit $\mu < \nu$;

4. Der Prozeß breche für das erste ϱ derart ab, daß der Schritt 2. nicht mehr anwendbar ist.

ϱ ist Limeszahl; denn für $\varrho = \varrho' + 1$ wäre nach Konstruktion der Schritt 2. zugleich auf $\mathfrak{S}_{\varrho'}$ und $\mathfrak{S}_\varrho$ anwendbar.

$\mathfrak{S}_\varrho = \mathfrak{a}$.

Daß $\mathfrak{a} \varepsilon \mathfrak{S}_\varrho$ ist, folgt sofort aus 1.–3. $\mathfrak{S}_\varrho$ ist als Durchschnitt ineinandergeschachtelter Schar-Intervalle selbst Schar und Intervall; enthielte $\mathfrak{S}_\varrho$ nicht nur ein Element, so wäre $\mathfrak{S}_\varrho$ wegen Satz 1_2 des § 2 als Schar, die ja durch ähnliche Abbildung aus einer Unter-

---

[35]) cf. Anm.[11]).

[36]) Wegen Satz 2 des § 1 würde die Forderung der Offenheit genügen, wovon im folgenden Gebrauch gemacht wird.

[37]) Im Sinne der Definition 2 des § 1.

[38]) Daß dieser Satz nicht für beliebige *T*-Gruppen gilt, dürfte wesentlich daran liegen, daß i. a. weder die Ordnungs- noch die Zwischenrelation topologisch-invariant sind; aus demselben Grunde war es auch nicht möglich, die Definition 1 des § 2 durch Satz 1_3 des § 2 zu ersetzen.

[39]) Den Fall, daß $\mathfrak{G}$ nicht überall dicht ist, also unter 3 a des Satzes 3 des § 2 fällt, können wir ausschließen, da dann $\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ eine Umgebung ist.

gruppe hervorgeht, ein offenes Intervall, d. h. der Schritt 2. wäre noch anwendbar, im Widerspruch zu 4.

Wir zeigen, daß das System der $\mathfrak{S}_\nu$ mit $\nu < \varrho$ ein vollständiges Umgebungssystem von $\mathfrak{a}$ ist. Hieraus folgt wegen Satz 1_{3b} des § 2, daß die Gesamtheit der Nebenscharen der $\mathfrak{S}_\nu$ mit $\nu < \varrho$ (die $\mathfrak{S}_\nu$ eingeschlossen) ein vollständiges Umgebungssystem von $\mathfrak{G}$ bildet.

Hierzu haben wir nur zu zeigen, daß in jedem $\mathfrak{a}$ enthaltenden offenen Intervall wenigstens ein $\mathfrak{S}_\nu$ enthalten ist [40]).

Sei $\mathfrak{J}(\mathfrak{a})$ irgendein $\mathfrak{a}$ enthaltendes offenes Intervall, $\mathfrak{a}_i \varepsilon \mathfrak{J}(\mathfrak{a})$ derart, daß

$$\mathfrak{a}_1 < \mathfrak{a} < \mathfrak{a}_2$$

gilt. Die Gesamtheit der $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{a}_1 < \mathfrak{x} < \mathfrak{a}_2$ bildet dann ein in $\mathfrak{J}(\mathfrak{a})$ enthaltenes, $\mathfrak{a}$ enthaltendes offenes Intervall $\mathfrak{J}_1(\mathfrak{a})$.

Wegen $\mathfrak{S}_\varrho = \mathfrak{a}$ muß es unter den $\mathfrak{S}_\nu$ wenigstens ein $\mathfrak{S}_{\nu_0}$ geben, so daß

$$\mathfrak{a}_i \notin \mathfrak{S}_{\nu_0} \quad (i = 1, 2).$$

Da aber dann $\mathfrak{a} \varepsilon \mathfrak{S}_{\nu_0} < \mathfrak{J}_1 < \mathfrak{J}$ gilt, so leistet $\mathfrak{S}_{\nu_0}$ das Verlangte.

In diesem Fall ist also $\mathfrak{G}$ eine S-Gruppe. Es bleibt noch zu zeigen, daß im andern Fall $\mathfrak{N}(\mathfrak{a})$ eine normale Unterschar ist. Geht bei einer ähnlichen Abbildung von $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{N}(\mathfrak{a})$ in ein $\mathfrak{N}_1(\mathfrak{a})$ mit

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) \frown \mathfrak{N}_1(\mathfrak{a}) \neq 0$$

über, so ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) \frown \mathfrak{N}_1(\mathfrak{a})$ eine offene, $\mathfrak{a}$ enthaltende Schar in $\mathfrak{N}(\mathfrak{a})$, also $= \mathfrak{N}(\mathfrak{a})$, d. h. bei allen ähnlichen Abbildungen von $\mathfrak{G}$ auf sich geht $\mathfrak{N}(\mathfrak{a})$ entweder in sich oder in ein fremdes System über, ist also normal [41]).

Definition 3: *Eine O-Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt Archimedisch, wenn es zu jedem Elementepaar $\mathfrak{a}_i \varepsilon \mathfrak{G}$ $(i = 1, 2)$ mit*

$$1 < \mathfrak{a}_1 < \mathfrak{a}_2$$

eine ganze Zahl n derart gibt, daß $\mathfrak{a}_1^n \geqq \mathfrak{a}_2$ ist.

Eine nicht überall dichte, Archimedische O-Gruppe ist wegen Satz 1_{3a} des § 2 vom Ordnungstypus $\omega^* + \omega$ und also ein Zyklus.

Satz 3: *Eine überall dichte O-Gruppe $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann unzerlegbar, wenn sie Archimedisch ist* [42]).

Beweis: A. Sei $\mathfrak{G}$ zerlegbar; dann gibt es eine echte Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$, die ein offenes Intervall in $\mathfrak{G}$ ist; ist dann $1 < \mathfrak{a} \notin \mathfrak{U}$, so ist keine Potenz eines Elementes aus $\mathfrak{U}$ größer als $\mathfrak{a}$, d. h. $\mathfrak{G}$ ist nicht Archimedisch.

B. Sei $\mathfrak{G}$ nicht Archimedisch; dann gibt es ein Elementepaar $\mathfrak{a}_i$ $(i = 1, 2)$, so daß für alle $n \geqq 0$ gilt $1 < \mathfrak{a}_1^n < \mathfrak{a}_2$. Wir betrachten die Gesamtheit $\mathfrak{J}$ der Elemente, die zwischen Elementen des aus $\mathfrak{a}_1$ erzeugten Zyklus liegen. $\mathfrak{J}$ ist ein offenes Intervall wegen Satz 1_2 des § 2, enthält aber $\mathfrak{a}_2$ nicht, ist also ein echter Teil von $\mathfrak{G}$. Um die Zerlegbar-

---

[40]) cf. *H. Tietze*: l. c. Anm.[13]) p. 293.

[41]) cf. BS, Definition 5 und Satz 7 des § 2.

[42]) Die Forderung, unzerlegbar zu sein, ist also eine rein topologische Formulierung der Forderung, Archimedisch zu sein; in dieser Form läßt sich das Archimedische Postulat also auch für T-Gruppen aussprechen.

Ist die Dimension einer T-Gruppe $\mathfrak{G}$ positiv und ist die Komponente eines beliebigen Punktes mehrpunktig, so existiert zu jedem $\mathfrak{a} \varepsilon \mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{a}$ enthaltende, unzerlegbare Schar; sie ist mit der Komponente von $\mathfrak{a}$ identisch.

Sind aber die Komponenten einpunktig, ist insbesondere die Dimension von $\mathfrak{G}$ Null, so läßt sich nicht mehr wie im Falle der O-Gruppen schließen, daß entweder $\mathfrak{G}$ eine S-Gruppe ist [in welchem Falle kein unzerlegbarer Bestandteil existiert] oder aber eine unzerlegbare, $\mathfrak{a}$ enthaltende Schar existiert.

keit von $\mathfrak{G}$ zu beweisen, ist also nur noch zu zeigen, daß $\mathfrak{J}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist. Sei $a_1^{n_i} < b_i \leqq a_1^{n_i+1}$ $(i = 1, 2)$, d. h. b_i zwei Elemente aus $\mathfrak{J}$; dann ist

$$a_1^{n_1} a_1^{n_2} < b_1 b_2 \leqq a_1^{n_1+1} a_1^{n_2+1},$$

d. h. $b_1 b_2 \varepsilon \mathfrak{J}$.

Da weiter bei der Inversion ι der von a_1 erzeugte Zyklus in sich übergeht, so tut dies auch $\mathfrak{J}$; $\mathfrak{J}$ enthält also mit b auch b^{-1}, ist also eine Gruppe.

Satz 4: *Ist $\mathfrak{G}$ eine unzerlegbare O-Gruppe, so ist $\mathfrak{G}$ dann und nur dann nulldimensional, wenn es ein echtes Teilintervall von $\mathfrak{G}$ gibt, das zugleich offen und abgeschlossen ist.*

Beweis: A. Ist $\mathfrak{G}$ nulldimensional, so enthält jedes offene Intervall von $\mathfrak{G}$ ein zugleich offenes und abgeschlossenes Intervall.

B. Ist $\mathfrak{G}$ nicht nulldimensional, so muß die Komponente $\mathfrak{C}(1)$ der Identität $\neq 1$ sein, da sonst jedes offene Intervall wenigstens ein offenes und abgeschlossenes, echtes Teilintervall enthielte; da $\mathfrak{G}$ also $\mathfrak{C}(1)$ ein offenes Intervall und unzerlegbar ist, so muß wegen der Sätze 2 u. 3 des § 1 $\mathfrak{C}(1) = \mathfrak{G}$ sein; da aber $\mathfrak{C}(1)$ zusammenhängend ist, kann es kein echtes Teilintervall in $\mathfrak{C}(1)$ geben, das zugleich offen und abgeschlossen ist.

Zusatz 1: *Eine Archimedische O-Gruppe $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann nulldimensional, wenn es einen Dedekindschen Schnitt zwischen ihren Elementen gibt, dem kein Element in $\mathfrak{G}$ entspricht, oder wenn sie nicht überall dicht ist.*

Zusatz 2: *Eine überall dichte O-Gruppe $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann eindimensional, wenn es einen Satz 2 des § 2 entsprechenden, unzerlegbaren Normalteiler von $\mathfrak{G}$ gibt, der dem Dedekindschen Schnittaxiom genügt.*

Beide Zusätze folgen aus den Sätzen 2—4 des § 2.

Satz 5: *Ist $\mathfrak{G}$ eine unzerlegbare, eindimensionale O-Gruppe, so ist $\mathfrak{G}$ vom Typus* [43]) *der Additionsgruppe des Körpers aller reellen Zahlen.*

Beweis: $\mathfrak{G}$ ist notwendig überall dicht und wegen Satz 3 des § 2 Archimedisch.

(a) *Zu jedem $a \varepsilon \mathfrak{G}$ und ganzzahligem $n > 0$ gibt es ein und nur ein $a_n \varepsilon \mathfrak{G}$, so daß $a_n^n = a$ ist.*

Wegen Satz 1_2 des § 2 können wir $a \neq 1$ voraussetzen.

A. Wir teilen die Elemente b von $\mathfrak{G}$ in zwei Klassen ein, je nachdem $b^n \leqq a$ ist oder $b^n > a$. Da dann und nur dann $b_1^n < b_2^n$, wenn $b_1 < b_2$ ist, so definiert diese Klasseneinteilung einen *Dedekind*schen Schnitt zwischen den Elementen von $\mathfrak{G}$, dem wegen der Eindimensionalität und Unzerlegbarkeit von $\mathfrak{G}$ nach Zusatz 2 des Satz 4 des § 2 ein Element a_n in $\mathfrak{G}$ entsprechen muß, das notwendig $a_n^n = a$ erfüllt.

B. Seien jetzt $a_n^n = b_n^n = a$ und $a_n < b_n$; dann wäre auch:

$$a_n^{n-1} a_n < a_n^{n-1} b_n < b_n^{n-1} b_n, \quad \text{d. h.} \quad a < a$$

was unmöglich ist. Also ist $a_n = b_n$.

(b) *$\mathfrak{G}$ ist kommutativ.*

Sei $\alpha\colon \mathfrak{x} \to a\,\mathfrak{x}\,a^{-1} = \alpha(\mathfrak{x})$, $a \neq 1$ ein bestimmter innerer Isomorphismus, also auch eine ähnliche Abbildung von $\mathfrak{G}$. α läßt die Identität und a fix; mit $\alpha(b_i) = b_i$ $(i = 1, 2)$ ist auch $\alpha(b_1 \cdot b_2) = \alpha(b_1) \cdot \alpha(b_2) = b_1 \cdot b_2$, d. h. α läßt auch Produkt und als Isomorphismus die Inversen, d. h. ganze Gruppen fix. Weiter ist $\alpha(a_n^n) = [\alpha(a_n)]^n = a$, d. h. $\alpha(a_n) = a_n$ wegen (a).

Also läßt α die ganze von den Elementen a_n erzeugte Untergruppe $\mathfrak{R}(a)$ von $\mathfrak{G}$ fix, und allgemein: *mit irgendeinem b läßt α auch alle b_n mit $b_n^n = b$ invariant.*

---

[43]) d. h. isomorph unter Erhaltung der Ordnung.

Sei jetzt $1 \neq \mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$ beliebig; dann gibt es zwei Elemente $\mathfrak{a}^{(i)} \in \mathfrak{R}(\mathfrak{a})$ derart, daß

$$\mathfrak{a}^{(1)} \leqq \mathfrak{g} \leqq \mathfrak{a}^{(2)}$$

ist; denn sonst wäre $\mathfrak{G}$ nicht Archimedisch (für $\mathfrak{g} > 1$ wäre $\mathfrak{a}^n < \mathfrak{g}$ für alle n).

Wir betrachten die Gesamtheit der Elemente

$$\alpha^n(\mathfrak{g}) \quad \text{für} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Da bei α die Ordnung von $\mathfrak{G}$ erhalten bleibt, müssen auch alle $\alpha^n(\mathfrak{g})$ zwischen $\mathfrak{a}^{(1)}$ und $\mathfrak{a}^{(2)}$ gelegen sein.

Aus dem Zusatz 2 des Satzes 4 des § 2 folgt dann die Existenz einer oberen und unteren Grenze für die Gesamtheit $\{\alpha^n(\mathfrak{g})\}$, d. h. es gibt zwei Elemente $\mathfrak{g}^{(i)}$, so daß

$$\mathfrak{g}^{(1)} \leqq \alpha^n(\mathfrak{g}) \leqq \mathfrak{g}^{(2)} \quad \text{für alle} \quad n = 0, \pm 1, \ldots$$

und aus $\mathfrak{h}_1 \leqq \alpha^n(\mathfrak{g}) \leqq \mathfrak{h}_2$ für alle n folgt:

$$\mathfrak{h}_1 \leqq \mathfrak{g}^{(1)} \leqq \mathfrak{g}^{(2)} \leqq \mathfrak{h}_2 .$$

Da bei α die Gesamtheit der $\alpha^n(\mathfrak{g})$ in sich übergeht, muß $\alpha(\mathfrak{g}^{(i)}) = \mathfrak{g}^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ sein; daraus folgt aber:

$$\mathfrak{g}^{(i)} = \alpha^n(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(i)};$$

denn sonst wäre das Element $\mathfrak{h}$ mit $\mathfrak{h}^2 = \mathfrak{g}^{(1)}\mathfrak{g}^{(2)}$ zwischen $\mathfrak{g}^{(1)}$ und $\mathfrak{g}^{(2)}$, also auch für ein n zwischen $\alpha^n(\mathfrak{g})$ und $\alpha^{n+1}(\mathfrak{g})$ gelegen, müßte einerseits bei α fix bleiben, andererseits in ein zwischen $\alpha^{n+1}(\mathfrak{g})$ und $\alpha^{n+2}(\mathfrak{g})$ gelegenes Element übergehen, was unmöglich ist.

Also ist für beliebige Paare $\mathfrak{a}, \mathfrak{g}$ aus $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{a}\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{g}$ oder $\mathfrak{a}\,\mathfrak{g} = \mathfrak{g}\,\mathfrak{a}$.

(c) $$\mathfrak{a}_n^m = [\mathfrak{a}^m]_n .$$

Denn es ist $[\mathfrak{a}_n^m]^n = \mathfrak{a}_n^{m \cdot n} = \mathfrak{a}^m$ und

$[\mathfrak{a}^m]_n^n = \mathfrak{a}^m$, also gilt (c) wegen (a).

(d) $$\mathfrak{a}_s^r\,\mathfrak{a}_q^p = \mathfrak{a}_{sq}^{qr+ps} .$$

Wegen (b) ist nämlich:

$$[\mathfrak{a}_s^r\,\mathfrak{a}_q^p]^{sq} = [\mathfrak{a}_s^r]^{sq}\,[\mathfrak{a}_q^p]^{sq} = \mathfrak{a}_s^{rsq}\,\mathfrak{a}_q^{psq} = \mathfrak{a}^{rq+ps} .$$

Aus (c) folgt jetzt (d).

(e) *Einem Dedekindschen Schnitt zwischen Elementen von* $\mathfrak{R}(\mathfrak{a})$ *entspricht genau ein Element von* $\mathfrak{G}$.

Daß einem *Dedekind*schen Schnitt wenigstens ein Element in $\mathfrak{G}$ entspricht, folgt daraus, daß $\mathfrak{R}(\mathfrak{a})$ überall dicht in $\mathfrak{G}$ ist und aus Zusatz 2 zu Satz 4 des § 2.

Mögen jetzt die Elemente $\mathfrak{b}_i \in \mathfrak{G}$ $(i = 1, 2)$ dem gleichen *Dedekind*schen Schnitt zwischen Elementen aus $\mathfrak{R}(\mathfrak{a})$ entsprechen; sei also stets: $\mathfrak{a}_s^r \geqq \mathfrak{b}_2 \geqq \mathfrak{b}_1 \geqq \mathfrak{a}_p^q$ für geeignete Paare (r, s) und (q, p); dann ist wegen (d) und Satz 1_1 des § 2:

$$\mathfrak{a}_s^r\,\mathfrak{a}_p^{-q} \geqq \mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_1^{-1} \geqq \mathfrak{a}_p^q\,\mathfrak{a}_s^{-r} \quad \text{oder}$$

$$\mathfrak{a}_{sp}^{rp-qs} \geqq \mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_1^{-1} \geqq \mathfrak{a}_{sp}^{qs-rp} = [\mathfrak{a}_{sp}^{rp-qs}]^{-1} ,$$

also speziell für alle $m \geqq 0$

$$\mathfrak{a}_m \geqq \mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_1^{-1} \geqq \mathfrak{a}_m^{-1}, \quad \text{wenn } \mathfrak{a} > 1,$$

$$\mathfrak{a}_m^{-1} \geqq \mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_1^{-1} \geqq \mathfrak{a}_m, \quad \text{wenn } \mathfrak{a} < 1.$$

Wegen $\mathfrak{a}_m < \mathfrak{a}$ bezw. $\mathfrak{a}_m < \mathfrak{a}^{-1}$ für alle $m > 1$ und (b) würde also jede Potenz von $\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_1^{-1}$ zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}^{-1}$ liegen, d. h. $\mathfrak{G}$ wäre nicht Archimedisch, wenn nicht $\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{b}_1$ ist. Damit ist (e) gezeigt.

Wählen wir jetzt speziell $\mathfrak{a} = \mathfrak{e} > 1$, so ist $\Re(\mathfrak{e})$ wegen (d) vom Typus der Additionsgruppe der rationalen Zahlen ($1 \to 0$, $\mathfrak{e} \to \varepsilon$ = Körpereinheit). Da $\Re(\mathfrak{e})$ überall dicht in $\mathfrak{G}$ ist, folgt hieraus in Verbindung mit (b) und (e) in üblicher Weise unser Satz.

Zusatz: *Ist $\mathfrak{G}$ eine unzerlegbare O-Gruppe, so ist $\mathfrak{G}$ vom Typus einer Untergruppe der Additionsgruppe des Körpers aller reellen Zahlen, insbesondere also kommutativ* [44]).

Beweis: Wegen Satz 1_3 des § 2 und der Unzerlegbarkeit können wir annehmen, daß $\mathfrak{G}$ überall dicht ist; wegen Satz 3 des § 2 ist $\mathfrak{G}$ Archimedisch.

Ein *Dedekind*scher Schnitt zwischen den Elementen von $\mathfrak{G}$ ist eine Einteilung der Gesamtheit, höchstens mit Ausnahme des Schnittelements, der Elemente von $\mathfrak{G}$ in zwei Klassen, so daß jedes Element der einen Klasse kleiner ist als jedes Element der anderen Klasse.

Dieser Definition ist in unserem Fall die folgende äquivalent:

Gegeben zwei Teilmengen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ von $\mathfrak{G}$; diese definieren dann und nur dann einen Dedekindschen Schnitt zwischen Elementen aus $\mathfrak{G}$, wenn 1. *jedes Element von $\mathfrak{K}_1$ kleiner ist als jedes von $\mathfrak{K}_2$ (bezw. jedes aus $\mathfrak{K}_2$ kleiner als jedes aus $\mathfrak{K}_1$);*

2. *es eine Folge $\mathfrak{J}_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) von offenen Intervallen gibt, so daß*

a) *$\mathfrak{J}_n$ stets $\mathfrak{J}_{n+k}$ ($k \geqq 0$) enthält,*

b) *jedes $\mathfrak{J}_n$ sowohl mit $\mathfrak{K}_1$ als auch mit $\mathfrak{K}_2$ Elemente gemein hat,*

c) *der Durchschnitt aller $\mathfrak{J}_n$ höchstens ein Element aus $\mathfrak{G}$ ist.*

Daß die Bedingungen hinreichen, folgt daraus, daß ein weder zu $\mathfrak{K}_1$ noch zu $\mathfrak{K}_2$ gehöriges Element von $\mathfrak{G}$ Element aller $\mathfrak{J}_n$ sein muß.

Beim Beweis der Notwendigkeit der Bedingungen ist nur die Existenz einer solchen Intervallfolge vom Typus ω zu zeigen; diese folgt aber daraus, daß es wegen der Archimedizität von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{K}_1$ eine aufsteigende, in $\mathfrak{K}_2$ eine absteigende gegen den Schnitt konvergierende Elementenfolge geben muß, die dann als Endpunkte der $\mathfrak{J}_n$ dienen können.

Wir können also auch o. B. d. A. annehmen, daß die $\mathfrak{J}_n$ offene Intervalle sind, die in $\mathfrak{G}$ Endpunkte $\mathfrak{u}_n < \mathfrak{o}_n$ haben.

Erweitern wir jetzt $\mathfrak{G}$ durch Hinzunahme aller *Dedekind*schen Schnitte, so ist die entstehende Menge $\mathfrak{V}$ eine Gruppe, wenn man das Produkt zweier *Dedekind*scher Schnitte als Produkt der Elemente deutet.

Seien $\mathfrak{K}_1^{(i)} | \mathfrak{K}_2^{(i)}$ zwei *Dedekind*sche Schnitte, $\mathfrak{J}_n^{(i)}$ mit $\mathfrak{u}_n^{(i)} < \mathfrak{o}_n^{(i)}$ die zugehörigen Intervallfolgen. Dann ist die durch $\mathfrak{u}_n^{(1)} \mathfrak{u}_n^{(2)} < \mathfrak{o}_n^{(1)} \mathfrak{o}_n^{(2)}$ definierte Intervallfolge $\mathfrak{J}_n^{(12)}$ gerade geeignet nachzuweisen, daß $\mathfrak{K}_1^{(1)} \mathfrak{K}_1^{(2)} | \mathfrak{K}_2^{(1)} \mathfrak{K}_2^{(2)}$ ein *Dedekind*scher Schnitt ist.

Da die Inversion in $\mathfrak{G}$ nur die Ordnung umkehrt, so gibt es zu jedem *Dedekind*schen Schnitt einen inversen [reziproken].

Überträgt man die Ordnung von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{V}$, so wird $\mathfrak{V}$ zur *O*-Gruppe, Archimedisch, eindimensional; wir können also Satz 5 des § 2 auf $\mathfrak{V}$ anwenden, woraus unser Zusatz folgt.

Anhang I: Charakterisierung des Körpers aller reellen Zahlen.

Sei K ein geordneter Körper [45]), R der Primkörper [46]) von K; dann ist die Additionsgruppe von K eine *O*-Gruppe und es folgt aus Satz 5 des § 2:

---

[44]) cf. *O. Hölder*: Leipziger Berichte 53 (1901), § 5, p. 13—14.

[45]) cf. Anm. [4]).

[46]) d. h. der rationalen Zahlen.

I. *Unter den in Bezug auf R Archimedisch geordneten Körpern* [47]) *ist nur der Körper aller reellen Zahlen* [48]) *eindimensional; alle anderen sind nulldimensional.*

Weiter gilt:

II. *Ist K in Bezug auf R nicht Archimedisch, so ist die Additionsgruppe von K eine S-Gruppe und umgekehrt.*

Die Umkehrung folgt sofort aus Satz 3 und 5 des § 2. Wir zeigen jetzt, womit dann II. völlig bewiesen ist:

Ist K in Bezug auf R nicht Archimedisch und J irgendein die Null enthaltendes offenes Intervall, so gibt es ein offenes Teilintervall S von J, das mit zwei Elementen auch ihre Summe und Differenz enthält.

Sei $a \varepsilon J$ derart, daß $-a \varepsilon J$ und $-a < 0 < a$ ist.

S sei dann die Gesamtheit der Elemente x mit $R(x) < R(a)$ [49]) *und* $0 \varepsilon S$.

S enthält nicht nur die Null; nach Voraussetzung gibt es nämlich ein Element $b \varepsilon K$, das unendlich klein ist, $b \neq 0$, also $R(b) < 0$ und $R(a \cdot b) = R(a) + R(b) < R(a)$[50]). Ist $b_i \varepsilon S$ und $b_1 \leqq c \leqq b_2$, so ist

$$R(c) \leqq \text{Max}\,[R(b_1),\ R(b_2)] < R(a),$$

d. h. $c \varepsilon S$.

Ist weiter $R(b_i) < R(a)$, so ist auch [51])

$$R(b_1 + b_2) \leqq \text{Max}[R(b_1),\ R(b_2)] < R(a),$$

und mit $R(b) < R(a)$ ist auch $R(-b) = R(b) < R(a)$, womit II. bewiesen ist.

Damit ist auch gezeigt:

II a. *Die Intervalle: „für festes* $R(a)$ *seien alle* $x \varepsilon K$ *mit* $R(x) < R(a)$ *im Intervall enthalten" und ihre Nebenscharen bilden ein vollständiges Umgebungssystem von K.*

Aus I. und II. folgt:

III. *Unter den geordneten Körpern ist der aller reellen Zahlen der einzige eindimensionale; alle anderen sind nulldimensional* [52]).

§ 3. S-Gruppen und ihre Unter-S-Gruppen.

Satz 1: *Ein System S von Scharen in* $\mathfrak{G}$ *ist dann und nur dann ein vollständiges Umgebungssystem einer S-Gruppe* $\mathfrak{G}$, *wenn*

1. *jede Schar aus S Umgebung eines jeden ihrer Punkte ist,*
2. *mit einer Schar in S alle ihre Nebenscharen* [53]) *enthalten sind,*
3. *mit* $\mathfrak{S}_i \varepsilon S$ $(i = 1, 2)$ *es auch eine Schar* $\mathfrak{S}_3$ *in S gibt, die in* $\mathfrak{S}_1 \frown \mathfrak{S}_2$ *enthalten ist,*
4. *es zu jedem Elementepaar* $\mathfrak{a}_i \varepsilon \mathfrak{G}$ $(i = 1, 2)$ *eine Schar* $\mathfrak{S} \varepsilon S$ *gibt, so daß*

$$\mathfrak{a}_1 \varepsilon \mathfrak{S} \quad \textit{und} \quad \mathfrak{a}_2 \notin \mathfrak{S}$$

gelten.

---

[47]) d. h. es gibt keine positiven Elemente in K, die kleiner sind als jedes positive Element aus R; diese Körper sind dann auch als O-Gruppen Archimedisch.

[48]) Im üblichen Sinne.

[49]) Unter $R(x)$ ist der Rang von x hinsichtlich des Systems der in Bezug auf R unendlich kleinen Elemente zu verstehen; cf. BK, § 2, p. 8/9. Zu der Aussage cf. BK, § 4, Satz 5.

[50]) cf. BK, § 2, R_2, R_6, R_A.

[51]) cf. BK, § 2, R_3.

[52]) Es wäre auch leicht möglich, diesen Satz direkt zu beweisen; jedoch scheint es mir, als ob so die Zusammenhänge besser klar werden.

[53]) cf. BS, Definition 4 des § 2.

Beweis: A. 1. Ist $\mathfrak{S} \varepsilon S$, so muß die Schar $\mathfrak{S}$ wenigstens Umgebung eines ihrer Elemente sein; sei $\mathfrak{a} \varepsilon \mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}$ Umgebung von $\mathfrak{a}$; ist jetzt $\mathfrak{b} \varepsilon \mathfrak{S}$ beliebig, so gibt es eine rechtsähnliche Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf sich, bei der $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{b}$ und also $\mathfrak{S}$ in sich übergeht[54]); dann ist $\mathfrak{S}$ auch Umgebung von $\mathfrak{b}$.

2. Bei den ähnlichen Abbildungen von $\mathfrak{G}$ auf sich geht $\mathfrak{S} \varepsilon S$ in alle seine Nebenscharen über.

3. bezw. 4. folgen aus den Umgebungsaxiomen (B) bezw. (D).

B. Aus 1. folgt, daß die Umgebungsaxiome (A) und (C) erfüllt sind; aus 3. folgt die Erfülltheit von (B)[55]).

Sind $\mathfrak{a}_i \varepsilon \mathfrak{G}$ beliebig, so gibt es wegen 4. eine Schar $\mathfrak{S} \varepsilon S$ mit $\mathfrak{a}_1 \varepsilon \mathfrak{S}$, $\mathfrak{a}_2 \notin \mathfrak{S}$; die $\mathfrak{a}_2$ enthaltende Rechtsnebenschar von $\mathfrak{S}$ gehört wegen 2. auch zu S und hat mit $\mathfrak{S}$ kein Element gemein; also ist auch das Umgebungsaxiom (D) erfüllt.

Daß schließlich $\mathfrak{G}$ eine T-Gruppe ist, folgt aus 2.; denn bei der Gruppe A aller ähnlichen Abbildungen von $\mathfrak{G}$ auf sich geht S in sich über.

Zusatz[56]): *Ist $\mathfrak{G}$ eine S-Gruppe, so ist das System S_0 aller in $\mathfrak{G}$ offenen Scharen dem ursprünglichen Umgebungssystem äquivalent und es gilt:*

3_0. *mit $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ gehört auch $\mathfrak{S}_1 \frown \mathfrak{S}_2$ zu S_0.*

Das letzte folgt aus der Tatsache, daß der Durchschnitt von zwei offenen Scharen wieder eine offene Schar ist.

Wir können also im folgenden o. B. d. A. annehmen, daß das definierende Umgebungssystem einer S-Gruppe den Bedingungen 1. 2. 3_0 und 4. genügt.

Satz 2a: *Für S-Gruppen ist die Inversion*[57]) *eine topologische Abbildung.*

Beweis: Sei $\mathfrak{S}$ eine Umgebung in der S-Gruppe $\mathfrak{G}$, also eine Schar; dann gibt es eine Untergruppe $\mathfrak{S}_1$ von $\mathfrak{G}$, so daß

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \cdot \mathfrak{a}$$

ist. Wegen Bedingung 2. des Satzes 1 des § 3 sind dann auch $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{a}^{-1} \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}^{-1}$ Umgebungen in $\mathfrak{G}$, d. h. bei der Inversion gehen Umgebungen wieder in solche über.

Aus Satz 4 des § 1 folgt dann der

Zusatz: *In S-Gruppen ist die abgeschlossene Hülle einer Schar wieder eine Schar.*

Satz 2b: *Jede S-Gruppe $\mathfrak{G}$ hat die Eigenschaft* (M).

Beweis: Sei $\mathfrak{A}_i \leqq \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{h}_i$ Hp von $\mathfrak{A}_i$ $(i = 1, 2)$. Ist weiter $\mathfrak{h}_1 \mathfrak{U}$ eine Umgebung von $\mathfrak{h}_1$, so $\mathfrak{U} \mathfrak{h}_2$ eine von $\mathfrak{h}_2$ und $\mathfrak{h}_1 \mathfrak{U} \mathfrak{h}_2$ eine von $\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_2$, und jede Umgebung von $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_2$ läßt sich in diese Gestalt bringen; da $\mathfrak{h}_1 \mathfrak{U}$ unendlich viele Elemente von $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{U} \mathfrak{h}_2$ unendlich viele von $\mathfrak{A}_2$ enthält, so enthält also $(\mathfrak{h}_1 \mathfrak{U}) \times (\mathfrak{U} \mathfrak{h}_2) = \mathfrak{h}_1 \mathfrak{U} \mathfrak{h}_2$ unendlich viele Elemente von $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ d. h. $\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_2$ ist Hp von $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$.

Aus Satz 5 des § 1 folgt dann der

Zusatz: *In einer S-Gruppe ist der Normalisator einer abgeschlossenen Untergruppe selbst abgeschlossen.*

Ist $\mathfrak{G}$ eine S-Gruppe und $\mathfrak{A}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{A}$ eine Unter-S-Gruppe von $\mathfrak{G}$, wenn man als Umgebungen in $\mathfrak{A}$ die nicht leeren Durchschnitte mit Umgebungen in $\mathfrak{G}$ auffaßt[58]); die Umgebungen in $\mathfrak{A}$ sind dann wieder Scharen; die in $\mathfrak{A}$ offenen bezw.

---

[54]) cf. BS, Satz 4 des § 2.

[55]) Wenn man 2. und BS, Zusatz zu Satz 5 des § 2 berücksichtigt.

[56]) Dies ist ganz analog zu *Tietze*, l. c. p. 294, Abschnitt 4.

[57]) cf. Definition 3 des § 1.

[58]) cf. hierzu *F. Hausdorff*: Mengenlehre 2. Aufl., § 24.

abgeschlossenen Mengen sind Durchschnitte von $\mathfrak{A}$ mit in $\mathfrak{G}$ offenen bezw. abgeschlossenen Mengen.

Verstehen wir jetzt unter $\overline{\mathfrak{A}}$ die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}$, so können wir, wenn wir das Verhältnis von $\mathfrak{A}$ zu $\overline{\mathfrak{A}}$ studieren wollen, wegen des Zusatzes zu Satz 2a des § 3 annehmen, daß

$$\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{G}$$

ist.

Satz 3: *Ist $\mathfrak{S}$ eine Umgebung aus $\mathfrak{G}$, so ist:*

(1) $$\mathfrak{S} = \overline{\mathfrak{S} \cap \mathfrak{A}}.$$

Beweis: Als offene Schar ist $\mathfrak{S}$ nach Satz 2 des § 1 auch in $\mathfrak{G}$ abgeschlossen; also ist:

$$\mathfrak{S} \geqq \overline{\mathfrak{S} \cap \mathfrak{A}}.$$

Weiter ist wegen $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{G}$ jeder Punkt $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{G}$ Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$ [59]); es müssen sich also in jeder Umgebung von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{G}$ unendlich viele Punkte aus $\mathfrak{A}$ finden, d. h.

$$\mathfrak{S} \leqq \overline{\mathfrak{S} \cap \mathfrak{A}}.$$

Zusatz 1: *Sind $\mathfrak{S}_i$ $(i = 1, 2)$ zwei Umgebungen aus $\mathfrak{G}$, so ist dann und nur dann*

$$\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{A} = \mathfrak{S}_2 \cap \mathfrak{A}, \quad \textit{wenn} \quad \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2 \quad \textit{ist.}$$

Denn es ist: $\mathfrak{S}_i = \overline{\mathfrak{S}_i \cap \mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{S}_2 \cap \mathfrak{A}}$ bezw. $= \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2$.

Zusatz 2: *Ist $\mathfrak{S}$ eine [Relativ-]Umgebung aus $\mathfrak{A}$, so ist:*

(2) $$\mathfrak{S} = \overline{\mathfrak{S}} \cap \mathfrak{A}.$$

Denn es ist $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}' \cap \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{S}' = \overline{\mathfrak{S}' \cap \mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{S}}$.

Zusatz 3: *Die Gleichungen* (1) *und* (2) *stellen eine eineindeutige Beziehung zwischen den Umgebungen in $\mathfrak{G}$ und den Relativumgebungen in $\mathfrak{A}$ her, die hinsichtlich der Relationen:*

Rechts-, Links-, Nebenschar sein, Unterschar sein

isomorph ist.

Beweis: Die Eineindeutigkeit der Beziehung folgt aus Zusatz 1.

Seien $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}\mathfrak{b}$ zwei Umgebungen in $\mathfrak{G}$; dann ist $(\mathfrak{S} \cap \mathfrak{A})\mathfrak{b} = \mathfrak{S}\mathfrak{b} \cap \mathfrak{A}\mathfrak{b}$ eine Rechtsnebenschar von $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{A}$; da weiter $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{b}$ entweder identisch oder fremd sind [60]), so ist $\mathfrak{S}\mathfrak{b} \cap \mathfrak{A}\mathfrak{b}$ auch eine Rechtsnebenschar von $\mathfrak{S}\mathfrak{b} \cap \mathfrak{A}$, d. h. $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{S}\mathfrak{b} \cap \mathfrak{A}$ sind Rechtsnebenscharen. Sind umgekehrt $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{S}_2 \cap \mathfrak{A}$ zwei Relativumgebungen und ist

$$\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{A} = (\mathfrak{S}_2 \cap \mathfrak{A})\mathfrak{b} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{b} \varepsilon \mathfrak{A}, \quad \text{so ist:}$$
$$= \mathfrak{S}_2\mathfrak{b} \cap \mathfrak{A}\mathfrak{b} = \mathfrak{S}_2\mathfrak{b} \cap \mathfrak{A}, \quad \text{d. h.}$$

$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2\mathfrak{b}$.

Ist schließlich $\mathfrak{S}_1$ in $\mathfrak{S}_2$ als echter Teil enthalten, so auch $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{A}$ in $\mathfrak{S}_2 \cap \mathfrak{A}$ als echter Teil wegen der Eineindeutigkeit unserer Beziehung.

§ 4. Erweiterung von *S*-Gruppen zu vollständig abgeschlossenen *S*-Gruppen.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe:

(V) *Zu einer in sich dichten S-Gruppe $\mathfrak{G}$ ist eine $\mathfrak{G}$ umfassende S-Gruppe $\mathfrak{V}$ zu finden, so daß*

---

[59]) Wenn wenigstens ein Punkt von $\mathfrak{A}$ Häufungspunkt von $\mathfrak{A}$ und damit alle Punkte aus $\mathfrak{G}$ Häufungspunkte von $\mathfrak{G}$ sind; das können wir aber ruhig annehmen, da sonst $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$ wäre.

[60]) cf. BS, Satz 4 des § 2.

1. $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{B}$,

2. *eine Schar* $\mathfrak{S}$ *aus* $\mathfrak{B}$ *dann und nur dann eine Umgebung in* $\mathfrak{B}$ *ist, wenn* $\mathfrak{S} \frown \mathfrak{G}$ *eine Umgebung in* $\mathfrak{G}$ *ist, und wenn die Gleichungen* (1) *und* (2) *des* § 3 *zwischen den Umgebungen aus* $\mathfrak{B}$ *und aus* $\mathfrak{G}$ *bestehen,*

3. $\mathfrak{B}$ *vollständig abgeschlossen ist, d. h. jede* 1. *und* 2. *genügende Erweiterung von* $\mathfrak{B}$ *liefert* $\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}$ [61]).

Definition 1: *Ein System S von Umgebungen einer S-Gruppe (also ein System von Scharen heißt ein definierendes Scharsystem* [62]), *wenn*

1. *mit zwei Scharen auch ihr Durchschnitt nicht leer ist und in S enthalten ist,*

2. *zu jeder Schar, die Umgebung ist, genau eine Rechtsnebenschar in S vorkommt* [63]).

Satz 1: 1. *Ist* $\mathfrak{A}$ *irgendeine S-Gruppe, so ist die Gesamtheit der Umgebungen eines Punktes* $\mathfrak{a} \varepsilon \mathfrak{A}$ *ein definierendes Scharsystem* $S(\mathfrak{a})$.

2. *Der Durchschnitt aller Scharen eines definierenden Scharsystems ist höchstens ein Element* [64]).

Beweis: 1. Daß für die Gesamtheit der Umgebungen eines Punktes die Bedingung 1. erfüllt ist, folgt aus 3_0. des Zusatzes zu Satz 1 des § 3; Bedingung 2. folgt aber daraus, daß eine Rechtsnebenschar einer $\mathfrak{a}$ enthaltenden Schar $\mathfrak{S}$ nur dann $\mathfrak{a}$ enthält, wenn sie mit $\mathfrak{S}$ identisch ist, und aus Bedingung 2. des Satzes 1 des § 3.

2. Sind $\mathfrak{a}_i \varepsilon \mathfrak{A}$ $(i = 1, 2)$ irgendzwei Elemente, so gibt es wegen Satz 1_2 des § 3 eine Umgebung $\mathfrak{S}$, so daß $\mathfrak{a}_1 \varepsilon \mathfrak{S}$, $\mathfrak{a}_2 \notin \mathfrak{S}$ gilt; dann kann aber keine Rechtsnebenschar von $\mathfrak{S}$ gleichzeitig $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ enthalten.

Satz 2: *Sind* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *zwei S-Gruppen, so daß* $\mathfrak{A}$ *in* $\mathfrak{B}$ *enthalten und* $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{B}$ *ist, so entspricht jedem definierenden Scharsystem:*

$$S = \{\mathfrak{S}_\nu\} \text{ aus } \overline{\mathfrak{A}}$$

ein definierendes Scharsystem:

$$S \frown \mathfrak{A} = \{\mathfrak{S}_\nu \frown \mathfrak{A}\} \text{ aus } \mathfrak{A}$$

und umgekehrt jedem definierenden Scharsystem:

$$S = \{\mathfrak{S}_\nu\} \text{ aus } \mathfrak{A}$$

ein definierendes Scharsystem:

$$\overline{S} = \{\overline{\mathfrak{S}}_\nu\} \text{ aus } \overline{\mathfrak{A}},$$

und wir können schreiben:

$$\overline{S \frown \mathfrak{A}} = S \text{ bezw. } \overline{S} \frown \mathfrak{A} = S.$$

Dies folgt unmittelbar aus Satz 3 des § 3 und den Zusätzen dazu.

Seien $\mathfrak{S}_i$ $(i = 1, 2)$ zwei Scharen und

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{a}\,\mathfrak{S}_l, \quad \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_r\,\mathfrak{b},$$

---

[61]) Aus Satz 3 des § 3 und den Zusätzen dazu folgt, daß eine vollständig abgeschlossene S-Gruppe $\mathfrak{B}$ der Beziehung $\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}$ auch in jeder Erweiterung genügt, die nur die Bedingung erfüllt:

Eine Schar der Erweiterung $\mathfrak{E}$ ist dann und nur dann Umgebung von $\mathfrak{E}$, wenn ihr Durchschnitt mit der zu erweiternden Gruppe $\mathfrak{B}$ eine Umgebung in $\mathfrak{B}$ oder leer ist.

[62]) Wir entnehmen den Terminus im wesentlichen einer Arbeit von *P. Alexandroff*: Über die Struktur der bikompakten topologischen Räume; Math. Ann. Bd. 92 (1924), p. 269, Definition 4, wo er in ähnlicher Bedeutung wie bei uns gebraucht wird; dies zeigt der folgende Satz 1 des § 4 bei uns.

[63]) cf. *H. Prüfer*: Theorie der Abelschen Gruppen II; Math. Zeitschr. Bd. 22 (1925), p. 223; an die Stelle unserer „Umgebungen" treten dort die „großen Untergruppen".

[64]) Speziell ist also dann und nur dann $S(\mathfrak{a}) = S(\mathfrak{b})$, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ ist.

wo $\mathfrak{S}_l$, $\mathfrak{S}_r$ Untergruppen sind. Das Produkt $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$ (in dieser Reihenfolge) ist dann und nur dann bildbar, wenn $\mathfrak{S}_l = \mathfrak{S}_r$ ist [65]); existiert aber das Produkt, so sei:

$$\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{a}\,\mathfrak{S}_l\,\mathfrak{b}$$

in üblicher Weise als Produkt der Elemente definiert [65]).

Satz 3: *Sind S_1 und S_2 zwei definierende Scharsysteme, so ist auch die Gesamtheit S_{12} der möglichen Produkte je einer Schar aus S_1 mit einer Schar aus S_2 (in dieser Reihenfolge) wieder ein definierendes Scharsystem. Wir setzen $S_{12} = S_1 S_2$.*

Beweis: Sei $\mathfrak{S}$ irgendeine als Umgebung auftretende Gruppe; wegen Definition 1_2 des § 4 gibt es in S_1 eine Rechtsnebenschar $\mathfrak{S}\mathfrak{a}_1$ von $\mathfrak{S}$. Weiter ist:

$$\mathfrak{S}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1(\mathfrak{a}_1^{-1}\mathfrak{S}\mathfrak{a}_1) = \mathfrak{a}_1\mathfrak{S}_1,$$

wo $\mathfrak{S}_1$ wieder eine Untergruppe ist. Wie oben gibt es in S_2 eine Rechtsnebenschar von $\mathfrak{S}_1$, etwa $\mathfrak{S}_1\mathfrak{a}_2$.

In S_{12} tritt also auf:

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{S}_1\cdot\mathfrak{S}_1\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{S}_1\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{S}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2,$$

eine Rechtsnebenschar von $\mathfrak{S}$; also ist die Bedingung 2. der Definition 1 des § 4 in S_{12} erfüllt.

Seien jetzt $\mathfrak{a}_i\mathfrak{S}_i\mathfrak{b}_i$ $(i = 1, 2)$, $\mathfrak{S}_i$ Gruppen, zwei Scharen aus S_{12}, d. h.

$$\mathfrak{a}_i\mathfrak{S}_i\,\varepsilon\,S_1 \quad\text{und}\quad \mathfrak{S}_i\mathfrak{b}_i\,\varepsilon\,S_2.$$

Dann ist
$$0 \neq \mathfrak{a}_1\mathfrak{S}_1 \frown \mathfrak{a}_2\mathfrak{S}_2\,\varepsilon\,S_1$$
und
$$0 \neq \mathfrak{S}_1\mathfrak{b}_1 \frown \mathfrak{S}_2\mathfrak{b}_2\,\varepsilon\,S_2.$$
Weiter ist:
$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{S}_1 \frown \mathfrak{a}_2\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{a}_3(\mathfrak{S}_1 \frown \mathfrak{S}_2)$$
$$\mathfrak{S}_1\mathfrak{b}_1 \frown \mathfrak{S}_2\mathfrak{b}_2 = (\mathfrak{S}_1 \frown \mathfrak{S}_2)\mathfrak{b}_3.$$

Also können wir das Produkt dieser beiden Durchschnitte bilden, welches dann auch in S_{12} enthalten ist. Es ist aber (bei Multiplikation der Elemente):

$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{S}_1 \frown \mathfrak{a}_2\mathfrak{S}_2)\cdot(\mathfrak{S}_1\mathfrak{b}_1 \frown \mathfrak{S}_2\mathfrak{b}_2) =$$
$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{S}_1\mathfrak{b}_1 \frown \mathfrak{a}_1\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2\mathfrak{b}_2 \frown \mathfrak{a}_2\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_1\mathfrak{b}_1 \frown \mathfrak{a}_2\mathfrak{S}_2\mathfrak{b}_2.$$

Wegen $\mathfrak{S}_1\mathfrak{b}_1 \frown \mathfrak{S}_2\mathfrak{b}_2 \neq 0$ ist jedes Element des ersten Gliedes $\mathfrak{a}_1\mathfrak{S}_1\mathfrak{b}_1$ in $\mathfrak{a}_1\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2\mathfrak{b}_2$, entsprechend $\mathfrak{a}_2\mathfrak{S}_2\mathfrak{b}_2$ in $\mathfrak{a}_2\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_1\mathfrak{b}_1$ enthalten. Also ist das Produkt der beiden Durchschnitte gerade gleich $\mathfrak{a}_1\mathfrak{S}_1\mathfrak{b}_1 \frown \mathfrak{a}_2\mathfrak{S}_2\mathfrak{b}_2$, dieser Durchschnitt mithin nicht leer und in S_{12} enthalten.

Zusatz 1: *Ist das definierende Scharsystem S_i die Gesamtheit der Umgebungen des Elementes $\mathfrak{a}_i$, so ist $S_{12} = S_1 S_2$ die Gesamtheit der Umgebungen von $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$.*

Beweis: Die Gesamtheit der Umgebungen aus S_1 läßt sich in der Form $\mathfrak{a}_1\mathfrak{S}$, die aus $\mathfrak{S}_2$ in der Form $\mathfrak{S}\mathfrak{a}_2$ darstellen, wo $\mathfrak{S}$ Gruppen sind; die Umgebungen von S_{12} haben also die Form: $\mathfrak{a}_1\mathfrak{S}\mathfrak{a}_2 = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{S}\mathfrak{a}_1^{-1})\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{S}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, wo $\mathfrak{S}_1$ eine Gruppe ist, enthalten also sämtlich $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$.

Wir ordnen jetzt jedem definierenden Scharsystem einer S-Gruppe $\mathfrak{G}$ ein (ideales) Element in einer neuen Gesamtheit $\mathfrak{V}$ zu; ist das definierende Scharsystem S die Gesamtheit der Umgebungen eines Elementes $\mathfrak{a}\,\varepsilon\,\mathfrak{G}$, so identifizieren wir das S in $\mathfrak{V}$ zugeordnete Element mit $\mathfrak{a}$. Dann gilt der

Zusatz 2: *Definieren wir als Multiplum der in $\mathfrak{V}$ zugeordneten Elemente das zugeordnete Element des Produkts der definierenden Scharsysteme, so ist $\mathfrak{V}$ eine $\mathfrak{G}$ umfassende Gruppe.*

---

[65]) cf. BS, Satz 8_1 des § 2; wir bilden also das Produkt, wie es im Gruppoid der Nebenscharen einer Schar zu bilden ist.

Beweis: Wegen Satz 3 des § 4 und Zusatz 1 haben wir nur noch die Existenz der Inversen zu Elementen aus $\mathfrak{V}$ zu zeigen. Sei S ein definierendes Scharsystem, $\mathfrak{S}_\nu\, \mathfrak{a}_\nu$ seine Scharen, wo $\mathfrak{S}_\nu$ Gruppen sind, so ist S^{-1} das Scharsystem, das aus allen Scharen $\mathfrak{a}_\nu^{-1}\mathfrak{S}_\nu$ besteht.

Satz 4: *Verstehen wir unter einer — der Umgebung $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{G}$ zugeordneten — Umgebung in $\mathfrak{V}$ die Gesamtheit der Elemente aus $\mathfrak{V}$, deren definierende Scharsysteme $\mathfrak{S}$ enthalten, so ist $\mathfrak{V}$*

1. *eine S-Gruppe,*
2. *bis auf topologische Isomorphismen*[66]) *die einzige Lösung unserer Aufgabe* (V).

Beweis: 1. Da für jede Schar $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{G}$

$$\mathfrak{S}\,\mathfrak{S}^{-1}\,\mathfrak{S} = \mathfrak{S}$$

ist[67]), so enthält mit den definierenden Scharsystemen S_i $(i = 1, 2, 3)$ auch

$$S_1 S_2^{-1} S_3$$

die Schar $\mathfrak{S}$ als Element; also sind die Umgebungen in $\mathfrak{V}$ Scharen.

Daß aber die übrigen Bedingungen des Satzes 1 des § 3 und seines Zusatzes in $\mathfrak{V}$ erfüllt sind, folgt aus ihrer Erfülltheit in $\mathfrak{G}$.

2. Wir zeigen, daß $\mathfrak{V}$ eine Lösung unseres Problems (V) ist.

Da in jeder Umgebung von $\mathfrak{V}$ unendlich viele Elemente aus $\mathfrak{G}$ enthalten sind, so ist $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{V}$. Weiter sei $\mathfrak{S}_\mathfrak{v}$ eine Umgebung in $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{S}_\mathfrak{g}$ die Umgebung in $\mathfrak{G}_1$ der $\mathfrak{S}_\mathfrak{v}$ zugeordnet ist; dann ist:

$$\mathfrak{S}_\mathfrak{v} \cap \mathfrak{G} = \mathfrak{S}_\mathfrak{g}, \quad \overline{\mathfrak{S}_\mathfrak{g}} = \mathfrak{S}_\mathfrak{v},$$

da $\mathfrak{S}_\mathfrak{g}$ im definierenden Scharsystem eines jeden Elementes aus $\mathfrak{S}_\mathfrak{v}$ auftritt.

Schließlich folgt aus Satz 2 des § 4, daß jede die Bedingungen 1., 2. von (V) erfüllende Gruppe einer Untergruppe von $\mathfrak{V}$ topologisch isomorph ist, womit gezeigt ist, daß $\mathfrak{V}$ eine und die einzige Lösung von (V) ist.

Hieraus folgt noch der

Zusatz: *Dann und nur dann ist eine S-Gruppe $\mathfrak{G}$ vollständig abgeschlossen, wenn die Scharen eines jeden definierenden Scharsystems in $\mathfrak{G}$ einen nicht leeren Durchschnitt haben, d. h. die Gesamtheit der Umgebungen eines Elements $\mathfrak{a} \varepsilon \mathfrak{G}$ darstellen.*

Definition 2: *Eine unendliche Menge $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{G}$ heiße konvergent, wenn es zu jeder Umgebung genau eine Rechtsnebenschar gibt, in der alle Elemente von $\mathfrak{M}$, abgesehen von einer Menge niederer Mächtigkeit als $\mathfrak{M}$, enthalten sind.*

Satz 5: *Ist $\mathfrak{G}$ eine vollständig abgeschlossene S-Gruppe, so hat jede konvergente Menge $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{G}$ einen Häufungspunkt.*

Beweis: Ist $\mathfrak{M}$ eine konvergente Menge, so ist die Menge M aller Schar-Umgebungen, die mit $\mathfrak{M}$ alle Punkte, abgesehen von einer Menge niederer Mächtigkeit, gemein haben, wegen der Konvergenz von $\mathfrak{M}$ ein definierendes Scharsystem, das also nach dem Zusatz zu Satz 4 des § 4 genau ein Element von $\mathfrak{G}$ definiert, das Häufungspunkt von $\mathfrak{M}$ ist.

Anhang II: Die nicht-Archimedisch geordneten Körper.

Sei K ein geordneter Körper, R der Primkörper von K und sei K in Beziehung auf R nicht-Archimedisch.

---

[66]) Eine topologische Isomorphie ist eine Isomorphie, bei der offene Mengen in offene Mengen übergehen.

[67]) cf. BS, Satz 6 des § 2.

Wir haben dann im Anhang I zu § 2 gezeigt, daß die Additionsgruppe von K eine O- und sogar eine S-Gruppe ist; weiter erwies sich das folgende System von Intervallen als ein System von Scharen — gegenüber der Addition — und als ein vollständiges Umgebungssystem: sei $k \varepsilon K$ beliebig und $R(a)$ der Rang irgendeines Elementes $a \varepsilon K$; wir bilden das Intervall, das aus allen und nur den $x \varepsilon K$ besteht, die $R(x-k) < R(a)$ erfüllen, und nennen es $J[k, R(a)]$.

Seien $J[k_i, R(a_i)] = J_i$ $(i = 1, 2)$ zwei solche Intervalle; dann gilt:

I. *Ist* $R(a_1) \leqq R(a_2)$ *und* $J_1 \frown J_2 \neq 0$, *so ist* J_1 *in* J_2 *enthalten; für* $R(a_1) < R(a_2)$ *ist* J_1 *dann echter Teil von* J_2.

Sei nämlich $k \varepsilon J_i$ für $i = 1$ und $i = 2$. Ist dann $x \varepsilon K$ derart, daß

$$R(x-k) < R(a_i)$$

ist, so ist auch

$$R(x-k_i) < R(a_i)$$

und umgekehrt. Denn es ist:

$$R(x-k) = R[(x-k_i) + (k_i - k)] \leqq \text{Max}\,[R(x-k_i),\ R(k_i-k)] < R(a_i)$$

wegen BK, § 2, R_3 und R_4, und ebenso ist:

$$R(x-k_i) = R[(x-k) + (k-k_i)] \leqq \text{Max}\,[R(x-k),\ R(k-k_i)] < R(a_i).$$

Ist jetzt $x \varepsilon J_1$, so ist $R(x-k_1) < R(a_1)$, also $R(x-k) < R(a_1) \leqq R(a_2)$, also $R(x-k_2) < R(a_2)$.

Hieraus folgt:

I a. *Ein definierendes Scharsystem ist eine Folge ineinandergeschachtelter Intervalle* $J[k_\nu, R(a_\nu)]$ *derart, daß jeder in* K *auftretende Rang* R *genau einmal vorkommt.*

Es gilt aber:

II. *Jedes definierende Scharsystem bestimmt genau einen „Dedekindschen Schnitt“*[68] *zwischen Elementen aus* K *und umgekehrt in eineindeutiger Weise.*

A. Sei S ein definierendes Scharsystem; wir tun dann in die erste Klasse des zugehörigen *Dedekind*schen Schnitts alle Elemente aus K, die kleiner sind als die Elemente irgendeines Intervalles aus S, in die zweite Klasse alle die, die größer sind als die Elemente irgendeines Intervalles aus S. Wegen I a sind dann alle Elemente der ersten Klasse kleiner als alle der zweiten Klasse; ist weiter $e > 0$ beliebig aus K, so gibt es ein Elementepaar $b_i \varepsilon K$, so daß b_1 aus der ersten, b_2 aus der zweiten Klasse stammt und $b_2 - b_1 < e$ ist; denn es gibt zwei Ränge $R(a_i)$ mit $R(a_1) < R(a_2) < R(e)$ und in S also verschiedene Intervalle $J[k_i, R(a_i)]$.

---

[68]) Hierbei verstehen wir unter einem *Dedekind*schen Schnitt eine Einteilung der Elemente von K in zwei Klassen K_1 und K_2, so daß

1. jedes Element aus K in genau einer der Klassen auftritt,
2. jedes Element von K_1 kleiner ist als jedes von K_2,
3. es zu jedem $e > 0$ ein Elementepaar $k_i \varepsilon K_i$ gibt, so daß $k_2 - k_1 < e$ ist.

Die Eigenschaft 3., die für die Erweiterung zum Körper aller *Dedekind*schen Schnitte notwendig gebraucht wird, folgt im Gegensatz zu den Archimedischen Körpern für keinen nicht-Archimedischen Körper aus den Eigenschaften 1. und 2., wie das folgende Beispiel zeigt:

Sei $0 < a \varepsilon K$ derart, daß $R(a) < 0$ ist; ein solches a gibt es, da K nicht-Archimedisch ist; K_1 enthalte alle $x \leqq 0$ und alle $x \varepsilon K$ derart, daß $R(x) < R(a)$ ist, K_2 alle übrigen Elemente von K. Diese Klasseneinteilung erfüllt 1. und 2., aber nicht Bedingung 3. Wir wählen etwa $e = a^2$; dann ist $R(e) = 2\,R(a) < R(a) < 0$.

Ist jetzt $0 < k_1 \varepsilon K_1$ und $k_2 \varepsilon K_2$ beliebig, so ist $R(k_2) \geqq R(a) > R(k_1)$ und $R(k_2 - k_1) = R(k_2) > R(e)$ wegen BK, § 2, R_3, also gewiß $k_2 - k_1 > e$. (Es ist ja allgemein, wenn: $R(x_2) > R(x_1)$, $\frac{x_2}{x_1}$ unendlich groß, also, falls x_2 und x_1 gleiches Vorzeichen haben, $\frac{x_2}{x_1} > 1$.)

B. Wir betrachten sämtliche Intervalle $J[k, R(a)]$, die mit beiden Klassen des *Dedekind*schen Schnittes Elemente gemein haben; aus I und I a folgt dann, daß dies ein definierendes Scharsystem ist, und zwar wegen I gerade das, das ad A diesen *Dedekind*schen Schnitt bestimmte.

Bedenkt man jetzt in üblicher Weise, daß die Gesamtheit der *Dedekind*schen Schnitte eines geordneten Körpers einen geordneten Erweiterungskörper bildet, so folgt aus II, Satz 4 des § 4 und dem Zusatz von Satz 4 des § 4:

III. *Ein nicht-Archimedisch geordneter Körper K läßt sich auf eine und nur auf eine Weise zu einem vollständig abgeschlossenen erweitern.*

Dann und nur dann ist K vollständig abgeschlossen, wenn jedem Dedekindschen Schnitt zwischen Elementen aus K ein Element aus K entspricht.

Für Archimedisch geordnete Körper ist dieser Satz trivial.

Anhang III: Körper der Potenzreihen in einer Veränderlichen [69]).

Sei K ein beliebiger Körper, $K\{x\}$ der Körper aller Potenzreihen in x mit Koeffizienten aus K; [es mögen keine negativen Potenzen von x in den Potenzreihen auftreten].

Wir führen jetzt in $K\{x\}$ einen Umgebungsbegriff ein; da jede Umgebung eine Umgebung aller ihrer Elemente sein soll, sagen wir nur „Umgebung", nicht „Umgebung von . . .". Sei $p_n(x)$ irgendein Polynom n-ten Grades mit Koeffizienten aus K; alle Potenzreihen, die in ihren ersten $n+1$ Gliedern mit $p_n(x)$ übereinstimmen, bilden eine — durch $p_n(x)$ bestimmte — Umgebung n-ten Grades. Da $p_n - p_n + p_n = p_n$ ist, sind diese Umgebungen Scharen (hinsichtlich der Addition). Man überzeugt sich, *daß $K\{x\}$ eine S-Gruppe hinsichtlich der Addition, also nulldimensional ist.*

Es gilt sogar:

IV. *$K\{x\}$ ist vollständig abgeschlossen und die abgeschlossene Hülle von $K[x]$, dem durch Adjunktion des transszendenten Elementes x zu K entstehenden Integritätsbereiches.*

Dies folgt aus:

V. *Ein definierendes Scharsystem enthält Umgebungen jedes Grades $n > 0$, die durch Polynome $p_n(x)$ derart bestimmt sind, daß $p_{n_1}(x)$ mit $p_{n_2}(x)$ beginnt, wenn $n_1 \geqq n_2$ ist.*

Sind U_{ni} $(i = 1, 2)$ zwei Umgebungen und ist $U_{n_1} \frown U_{n_2} \neq 0$, so muß eine dem Durchschnitt angehörende Potenzreihe sowohl mit $p_{n_1}(x)$ als auch mit $p_{n_2}(x)$ beginnen; für $n_1 \geqq n_2$ muß also p_{n_1} mit p_{n_2} beginnen. — Jetzt bestimmt aber die Gesamtheit der [Umgebungen eines definierenden Scharsystems bestimmenden] Polynome $p_n(x)$ eindeutig eine Potenzreihe $f(x) = \lim p_n(x)$.

Anhang IV: Die unarchimedisch bewerteten Körper [70]).

Sei K ein unarchimedisch bewerteter Körper [71]). Dann ist also jedem x aus K eine — im üblichen Sinne — reelle Zahl $|x| \geqq 0$ [$|x| = 0$ dann und nur dann, wenn $x = 0$] so zugeordnet, daß

B_1. $|x_1| \cdot |x_2| = |x_1 \cdot x_2|$.

B_2. $|x_1 + x_2| \leqq \text{Max}\,[|x_1|, |x_2|]$.

Dann gilt:

B_3. *Für $|x_1| < |x_2|$ ist $|x_1 + x_2| = |x_2|$* [72]).

---

[69]) Die Anregung zu dieser Anwendung sowie den hier zu Grunde gelegten Umgebungsbegriff verdanke ich einem Vortrage von Herrn Prof. Dr. *W. Krull*: „Über Topologie der Potenzreihen" im Mathematischen Kolloquium an der Universität Freiburg i. Br. vom 12. Juli 1927; ich bin Herrn Prof. *Krull* für die Erlaubnis der Publikation dankbarst verpflichtet.

[70]) Den Hinweis auf diese Anwendung sowie die Tatsache, daß die unarchimedisch bewerteten Körper nulldimensional sind, verdanke ich Herrn Prof. Dr. *H. Hasse*.

[71]) cf. *A. Ostrowski*: Acta math. Bd. 41 (1918), p. 273/274, Nr. 3; ferner *H. Hasse*: dieses Journal, Bd. 155 (1927).

[72]) Unter diesem Fall lassen sich auch die Potenzreihenkörper subsumieren, indem man als Wert einer Potenzreihe e^{-n} setzt, wenn n der Exponent der niedrigsten auftretenden Potenz von x und $|0| = 0$ ist.

Wie üblich, versteht man dann unter einer [ε-] *Umgebung* von a aus K die Gesamtheit der x aus K mit $|x-a|<\varepsilon$.

I. *K ist hinsichtlich der Addition eine S-Gruppe und also nulldimensional.*

Wir haben nur zu zeigen, daß jede ε-Umgebung von a eine additive Schar ist; das folgt aber aus

$$|(x_1-x_2+x_3)-a| = |(x_1-a)-(x_2-a)+(x_3-a)| \leqq \text{Max}\,[(x_i-a)] < \varepsilon.$$

II. *Ein System Σ von Umgebungen S_ν, wo jedes S_ν eine ε-Umgebung eines Punktes aus K ist, ist dann und nur dann ein definierendes Scharsystem der additiven S-Gruppe K, wenn es*

1. *zu jedem überhaupt auftretenden Wert $\varepsilon>0$ eine und nur eine ε-Umgebung $S_{\nu(\varepsilon)}$ in Σ gibt,*
2. *für $\varepsilon_1<\varepsilon_2$ auch $S_{\nu(\varepsilon_1)}$ ganz in $S_{\nu(\varepsilon_2)}$ enthalten ist.*

Es ist nur zu zeigen:

Ist S_i $(i=1,2)$ eine ε_i-Umgebung des Punktes a_i in K, so ist S_1 ganz in S_2 enthalten, wenn

1. *$\varepsilon_1<\varepsilon_2$ und*
2. *$S_1 \frown S_2 \neq 0$ ist.*

Sei nämlich c in $S_1 \frown S_2$ und x in S_1 enthalten; dann ist wegen $|x-a_1|<\varepsilon_1<\varepsilon_2$ und $|c-a_i|<\varepsilon_i \leqq \varepsilon_2$ auch $|x-a_2| = |(x-a_1)-(c-a_1)+(c-a_2)| < \varepsilon_2$.

III. *Der Bereich $\overline{K}$ aller definierenden Scharsysteme ist eine und im wesentlichen die einzige absolut abgeschlossene Erweiterung von K.*

Wegen Satz 4 des § 4 haben wir nur zu zeigen, daß auch das Produkt [im Sinne der Körpermultiplikation] zweier definierenden Scharsysteme, das sich ergibt, wenn man die ε-Umgebung des ersten mit der ε-Umgebung des zweiten Systems multipliziert, eindeutig ein definierendes Scharsystem bestimmt.

Gilt $|x_i-a_i|<\varepsilon$ $(i=1,2)$, so gilt:

$$\varepsilon^2 > |x_1-a_1|\,|x_2-a_2| = |(x_1x_2-a_1a_2)+a_1(a_2-x_2)+a_2(a_1-x_1)|.$$

Da weiter $|a_1(a_2-x_2)+a_2(a_1-x_1)|<\varepsilon\,\text{Max}\,|a_i| \leqq \varepsilon$ ist, so folgt $|x_1x_2-a_1a_2|<\varepsilon$ wegen B_2, womit alles gezeigt ist.

IV. *In $\overline{K}$ hat jede Fundamentalreihe*[73]) *einen Limes; $\overline{K}$ ist also perfekt*[73]) *und der derivierte*[73]) *Körper von K.*

Sei nämlich $a_n (n=1,2,\ldots)$ eine Fundamentalreihe in $\overline{K}$; dann gibt es also zu jedem reellen ε mit $1>\varepsilon>0$ ein $n=n(\varepsilon)$, so daß für alle ganzzahligen $t \geqq 0$ gilt:

$$|a_{n+t}-a_n|<\varepsilon.$$

Ist jetzt ε_i $(i=1,2,\ldots)$ eine gegen Null strebende Folge von ε-Werten, so gehört dazu eine nicht abnehmende Reihe $n(\varepsilon_i)=n_i$. Ist jetzt S_i die ε_i-Umgebung von a_{n_i}, so bestimmt die Reihe der S_i eindeutig ein definierendes Scharsystem in $\overline{K}$ (also auch in K wegen Satz 2 des § 4), da alle a_{n_i+t} in S_i nach obiger Ungleichung enthalten sind. Also hat unsere Fundamentalfolge einen Limes, nämlich das durch unser definierendes Scharsystem bestimmte Element von K.

Alles andere folgt aus III.

---

[73]) Im Sinne von *A. Ostrowski*, l. c. p. 277, Nr. 5, wo die gleiche Frage für Archimedisch bewertete Körper behandelt wird.

Freiburg i. Br., d. 8. IV. 1928.

Eingegangen 27. März 1928.

Über eine Widerspruchfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre.

Von *J. v. Neumann* in Berlin.

Einleitung.

1. In zwei Arbeiten [1]) habe ich ein Axiomensystem der allgemeinen Mengenlehre angegeben, und daraus die Haupttatsachen der Mengenlehre hergeleitet. Dieses Axiomensystem ging dabei an zwei Punkten wesentlich über die *Zermelo-Fraenkel*sche Axiomatisierung hinaus.

A. Während *Zermelo-Fraenkel* das Aufstellen von Mengen nur dann gestatteten, wenn der Umfang derselben nicht „zu groß" war, dürfen hier die Mengen ruhig „zu groß" sein — aber sie sind nur dann als Elemente bei der Bildung anderer Mengen verwendbar, wenn sie nicht „zu groß" sind. Zur Vermeidung der bekannten Antinomien (*Russell*, *Burali-Forti*) reichte dies nämlich auch aus, und es ist für gewisse Zwecke so angenehmer (vgl. §§ 2, 3. Kap. I loc. cit. I).

B. Während *Zermelo-Fraenkel* nicht genau definieren, wann der Umfang einer Menge „zu groß" ist, sondern nur durch einige Postulate untere Grenzen setzen [2]), geben wir für diesen Begriff eine genaue Definition: Eine Menge ist dann und nur dann „nicht zu groß", wenn sie von kleinerer Mächtigkeit ist als die Menge aller Dinge überhaupt (d. h. wenn sie nicht so abgebildet werden kann, daß diese vollkommen überdeckt wird). (Dies wird exakt formuliert im Axiom IV. 2. Seite 225 loc. cit. I oder Seite 675 loc. cit. II. Übrigens vgl. §§ 2, 3. Kap. I loc. cit. I).

Ein dritter, aber bloß technisch wesentlicher Unterschied ist, daß wir den Begriff der Funktion und nicht den der Menge (beide sind ja leicht aufeinander zurückzuführen [3])) zum Ausgangspunkte des Axiomatisierens wählen. Dies ist aber, wie bereits erwähnt, vom prinzipiellen Gesichtspunkte wenig wichtig.

---

[1]) „Eine Axiomatisierung der Mengenlehre", Journal f. Math. Bd. 154, Seite 219—240 (1923); „Die Axiomatisierung der Mengenlehre", Math. Zeitschr. Bd. 27, Seite 669—752 (1928). Diese Arbeiten sollen mit I bezw. II zitiert werden. — Ich möchte diese Gelegenheit noch benützen, darauf hinzuweisen, daß der loc. cit. II, Seite 736 verwendete Begriff der „Endlichkeit" von Herrn *A. Tarski* stammt (Fund. Math. Bd. 6, Seite 45—95 [1924]).

[2]) Etwa: Wenn eine Menge „nicht zu groß" ist, ist es auch ihre Potenzmenge nicht (Potenzmengen-Axiom), und ihre Vereinigungsmenge nicht (Vereinigungsmengen-Axiom).

[3]) Die Menge können wir als Funktion auffassen, die nur zweier Werte A, B fähig ist: sie nimmt den Wert A an, wenn das Argument nicht Element der Menge ist, und den Wert B, wenn es Element ist. Die Funktion $f(x)$ kann durch „graphische Darstellung" in eine Menge verwandelt werden: sie sei die Menge aller „Paare" $\langle x, f(x)\rangle$, wobei x alle möglichen Werte des Arguments durchläuft. (Das „Paar" ist dabei irgendeine Zuordnung, die zwei Dingen x, y ein drittes $z = \langle x, y\rangle$ auf ein-eindeutige Weise zuordnet; d. h. so daß aus $\langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle$ $x = x', y = y'$ folgt; bei der gewöhnlichen, geometrischen, graphischen Darstellung, wo x, y die reellen Zahlen durchlaufen, ist z. B. $\langle x, y\rangle$ der Punkt der Ebene mit den kartesischen Koordinaten x, y. *Zermelo-Fraenkel* verwenden als „Paar" $\langle x, y\rangle$ die Menge mit den Elementen x, y, $\{x, y\}$. Wegen $\{x, y\} = \{y, x\}$ ist dies nicht ganz vollkommen [daher ihre Schwierigkeiten bei der Definition der Äquivalenz], einwandfrei wäre etwa das „Paar" $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ [vgl. Seite 239 unten loc. cit. I oder Seite 692 oben loc. cit. II]).

Es erhebt sich aber die Frage, ob unser System, dadurch daß es nach A, B wesentlich über die *Zermelo-Fraenkel*sche Mengenlehre hinausgeht, nicht an Zuverlässigkeit verliert: ob es der Gefahr von Widersprüchen nicht eher ausgesetzt ist, als diese.

Die absolute Frage der Widerspruchfreiheit, d. h. ob überhaupt eine gegebene Formalisierung der *allgemeinen* Mengenlehre mit *Gewißheit* [4]) zu keinen Widersprüchen führt, liegt außerhalb des Rahmens dieser Arbeit: in ihr soll nur aus der vorauszusetzenden Widerspruchfreiheit eines Systems auf die des anderen geschlossen werden [5]). Die absolute Frage der Widerspruchfreiheit ist m. E. gegenwärtig überhaupt viel zu schwer, um in Angriff genommen zu werden, prinzipiell wäre hierzu wohl nur die *Hilbert*sche Beweistheorie geeignet, jedoch halte ich es für höchst unwahrscheinlich, daß die (ihrer Natur nach mathematisch-kombinatorischen) Schwierigkeiten dieser Aufgabe beim heutigen Stande der Wissenschaft überwunden werden können (wiewohl das Problem leicht formuliert werden kann). Die Hauptschwierigkeit sehe ich darin, daß wir heute keine Ahnung davon haben, warum das von *Russell* und *Zermelo* eingeführte Prinzip des „Verbietens von Mengen von zu großem Umfange", ohne welches kein allgemeiner Aufbau der Mengenlehre möglich ist [6]), *alle* Widersprüche auflöst, und daher mangels einer adäquaten Beweisidee keinen Widerspruchfreiheitsbeweis versuchen können [7]).

2. Mit A wollen wir uns nicht befassen, denn es ist eine recht harmlose Erweiterung, man übersieht wirklich leicht, daß die Antinomien nicht in dem Moment auftreten, in dem eine gewisse Menge vom bedenklichen Typus (die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten, die Menge aller Ordnungszahlen usw.) gebildet wird, sondern erst wenn man untersucht, ob diese Menge Element einer anderen (die übrigens in der Regel wieder sie selbst ist) ist oder nicht. Daher ist die Erweiterung A nicht gefährlich.

Sehr wesentlich hingegen ist die Erweiterung durch B. Sie sieht auch gar nicht ungefährlich aus, dies merkt man z. B. ‚wenn man sich die Methode, mit der der Wohlordnungssatz aus B (d. h. Axiom IV. 2.) gefolgert wird (vgl. Seite 223 loc. cit. I, sowie die exakte Herleitung loc. cit. II, Seite 721 [Satz 47] und Seite 726—729), vergegenwärtigt. Wir schließen dort im wesentlichen so [8]):

---

[4]) Natürlich sieht man sowohl im Zermelo-Fraenkelschen als auch in unserem System, daß die bekannten Antinomien der Mengenlehre vermieden werden, aber es könnte, so unwahrscheinlich es auch ist, noch andere, unbekannte Antinomien geben.

[5]) So wie etwa die Widerspruchfreiheit der Euklidischen Geometrie die der nicht-Euklidischen nach sich zieht.

[6]) In solchen Systemen der Mengenlehre, die die Antinomien durch andere Verbote vermeiden, sind die ganz großen Mächtigkeiten, wie $\aleph + 2^{\aleph} + 2^{2^{\aleph}} + \cdots$ u. ä. in der Regel unerreichbar.

[7]) Wenn man nicht über gewisse Mächtigkeiten hinaus will, so ist die Anwendung von Hilberts Beweistheorie wesentlich aussichtsvoller, m. E. darum, weil uns hier Russels Typentheorie den wesentlichen Grund der Widerspruchfreiheit verrät. Wie groß die Schwierigkeiten auch hier noch sind, möge man immerhin daran ermessen, daß der Widerspruchfreiheitsbeweis bis zur Mächtigkeit $\aleph$ (Kontinuum) noch immer nicht lückenlos geführt ist!

Zur Literatur der Beweistheorie vgl. *D. Hilbert*, Abh. des Math. Seminars d. Hamb. Univ. Bd. 1., Seite 157—175 (1923); Math. Ann. Bd. 88, Seite 151—165 (1923); Abh. des Math. Seminars d. Hamb. Univ. Bd. 6, Seite 65—85 (1928); *P. Bernays*, Math. Ann. Bd. 90, Seite 159—163 (1923), Abh. des Math. Seminars d. Hamb. Univ. Bd. 6, Seite 89—92 (1928); *W. Ackermann*, Math. Ann. Bd. 92, Seite 1—35 (1926); *J. v. Neumann*, Math. Zeitschr. Bd. 26, Seite 1—46 (1927); *H. Weyl*, Handb. der Philosophie, Abt. II., A. I. (Mathematik), Seite 44—50 (1926); Abh. des Math. Seminars d. Hamb. Univ. Bd. 6, Seite 86—88 (1928).

[8]) Der kürzeren Ausdrucksweise halber (und um nur die wesentliche Beweisidee auszudrücken) bedienen wir uns einer (im jetzigen Sinne unexakten) Terminologie, die an die der naiven Mengenlehre anlehnt — die exakte Durchführung des Gedankens steht loc. cit. II, vgl. das Zitat im Text.

Die Menge aller Ordnungszahlen ist paradox, denn sie führt zur *Burali-Forti*schen Antinomie, also ist sie „zu groß", also der Menge aller (als Elemente von Mengen zulässiger) Dinge (in der Terminologie von loc. cit. II dem Bereiche aller I-Dinge, Ω) äquivalent (eben nach B, d. h. Axiom IV. 2.). Diese Menge aller Dinge ist somit einer wohlgeordneten Menge (der Menge aller Ordnungszahlen) äquivalent, also selbst wohlordenbar; jede andere Menge ist Teilmenge von ihr, also gleichfalls wohlordenbar [9]).

Man sieht: dieser Beweisgang geht mitten durch die *Burali-Forti*sche Antinomie hindurch. Daß keine Antinomie auftritt, ist eigentlich ein Wunder, dieses „Wunder" ist eben die Möglichkeit, sich aus dem Widerspruch in den Wohlordnungssatz zu retten [10]). Die Verhältnisse liegen ganz anders, wie bei der *Russell*schen Antinomie, die durch IV. 2. systematisch ausgeschaltet wurde, und wo die durch IV. 2. verlangte Abbildung der antinomischen Menge auf die Menge aller Dinge unschwer direkt angegeben werden kann [11]). Das Ganze ist aber recht unheimlich, denn wenn uns aus der *Burali-Forti*schen Antinomie bloß eine so grundverschiedene Sache wie der Wohlordnungssatz heraushilft, so bestehen hier offenbar unvermutete Zusammenhänge, mit denen man sich unbedingt auseinandersetzen muß, ehe man zu glauben geneigt sein wird, daß das Prinzip B, d. h. das Axiom IV. 2., wirklich zu keinen neuen Antinomien Veranlassung gibt.

Das Axiom IV. 2. leistet eben sehr viel, eigentlich zu viel: enthält es doch (in der *Zermelo-Fraenkel*schen Terminologie) die Axiome von den Elementarmengen, der Aussonderung, der Ersetzung und der Multiplikation (= Auswahlprinzip = Wohlordnungssatz); und dabei geht es über die eigentliche Mengenlehre hinaus (da es verlangt, daß alle Mengen, deren Mächtigkeit kleiner ist, als die der Gesamtheit aller Dinge überhaupt, noch als legitime Bildungen angesehen werden dürfen). Wir müssen also erörtern, ob seine Widerspruchfreiheit nicht noch problematischer ist, als die einer nicht wesentlich über den notwendigen *Cantor*schen Rahmen hinausgehenden Axiomatisierung der Mengenlehre.

3. Der Hauptgegenstand der vorliegenden Arbeit ist, folgendes zu zeigen: wenn die axiomatische Mengenlehre in dem Umfange, wie er dem *Cantor*schen Aufbau der

---

[9]) Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß dieses (an und für sich recht anfechtbare) Räsonnement nicht als Beweis, sondern als Skizze der Idee eines (a. a. O. durchgeführten) Beweises anzusehen ist.

[10]) D. h.: bei der Herleitung des *Burali-Forti*schen Widerspruches (die Menge aller Ordnungszahlen ist „zu groß") bleibt eine Möglichkeit des Entschlüpfens offen (Äquivalenz der Menge aller Ordnungszahlen mit der Menge aller Dinge); aber dann kann das ganze Räsonnement offenbar als Beweis per absurdum für das Eintreten dieser Möglichkeit angesehen werden.

[11]) Nämlich so: Sei 0 die leere Menge, $\{x\}$, $\{x, y\}$ die Menge mit dem einzigen Element x bzw. den zwei Elementen x, y. Die Menge $\{\{x, y\}\}$ enthält sich selbst gewiß nicht (es sei $x \neq y$), da sie genau ein Element hat, ihr einziges Element $\{x, y\}$ aber zwei. Ferner ist $\{x\}$ gewiß von 0 verschieden (da $\{x\}$ ein Element hat, und 0 keins). Somit ist

$$M_x = \{\{0, \{x\}\}\}$$

für jedes x eine Menge, die sich nicht selbst enthält. Weiter folgt aus $M_x = M_y$ $x = y$, denn die Vereinigungsmenge der Vereinigungsmenge von M_x ist $\{x\}$ („Vereinigungsmenge von M" heißt: Summe aller Elemente von M), also bestimmt M_x $\{x\}$, und somit auch x. Daher ist bereits ein Teil der Gesamtheit (in der Terminologie von loc. cit. II: des Bereiches) aller Mengen (d. h. aller „nicht zu großen" Mengen), die sich nicht selbst enthalten, mit der Gesamtheit aller x überhaupt äquivalent. (Nämlich die aller M_x).

Man entschuldige unser ständiges Operieren mit der dem Paradoxen nah verwandten „Gesamtheit aller Mengen, die sich nicht enthalten", u. a. (direkt paradox ist sie allerdings nicht, solange sie nicht selbst als Menge und Element anderer Mengen angesehen wird); daß dies nicht ernstlich gefährlich ist, sieht man daran, daß es mühelos z. B. in unserer axiomatischen Mengenlehre ebenso ausgeführt werden kann. Wir benutzen die Terminologie der naiven Mengenlehre eben nur zur Abkürzung.

Mengenlehre entspricht (der im wesentlichen dadurch charakterisiert werden kann, daß es zu jeder [nicht „zu großen"] Menge von Mächtigkeiten [nicht „zu großer" Mengen] eine noch größere Mächtigkeit [die noch immer zu einer nicht „zu großen" Menge gehört] gibt) widerspruchfrei ist, so ist auch unser Axiomensystem widerspruchfrei — insbesondere also sein, über die *Cantor*sche Mengenlehre hinausgehender Bestandteil B (Axiom IV. 2.). Um aber mit dieser Aussage einen exakten Sinn verbinden zu können (bisher waren ja unsere Erörterungen reichlich qualitativ), müssen wir auch die Mengenlehre vom „genau *Cantor*schen Umfange" formalisieren — axiomatisieren.

Als Rahmen dieser Axiomatisierung benützen wir (schon aus dem Grunde, nachher leichter Vergleiche anstellen zu können) unser Axiomensystem, d. h. natürlich mit gewissen Abänderungen: wir müssen gerade das näher zu untersuchende Axiom IV. 2. dahin abschwächen, daß unser derart modifiziertes Axiomensystem nicht mehr über den „*Cantor*schen Umfang" der naiven Mengenlehre hinausgeht. (An allen übrigen Punkten des Axiomensystems [12]) wird ja nicht wesentlich darüber hinausgegangen — viel mehr sind dort die zur Vermeidung der Antinomien notwendigen Verbote erkennbar.) Es erhebt sich also die Frage: wie muß zu diesem Zwecke Axiom IV. 2. modifiziert (d. h. abgeschwächt) werden?

Um das festzustellen, müssen wir uns vergegenwärtigen: zu welchen Zwecken verwenden wir das Axiom IV. 2.? Es sind ihrer im wesentlichen drei: IV. 2. ersetzt uns erstens das Aussonderungsaxiom, zweitens das Ersetzungsaxiom und drittens den Wohlordnungssatz (= Auswahlprinzip = Multiplikationsaxiom). Wir müssen daher diese drei Postulate für sich formulieren, unter Weglassung des darüber (und damit über den „*Cantor*schen Umfang" der Mengenlehre) hinausgehenden Teiles von Axiom IV. 2.

Die zwei ersten kann man wohl am einfachsten so zusammenfassen:

IV. 2*. Wenn f ein I II-Ding, f' ein II-Ding, und g ein II-Ding ist, und wenn zu jedem I-Ding x mit $[f', x] \neq A$ ein I-Ding y mit $[f, y] \neq A, [g, y] = x$ existiert, so ist auch f' ein I II-Ding [13]).

Den Wohlordnungssatz dagegen sichert man sich am besten, indem man das Auswahlprinzip in der folgenden (dem Begriff des *Hilbert*schen τ entsprechenden, vgl. loc. cit. II, Seite 728, Anm. 28 und 29) Form aufstellt: das Axiom III. 3. wird zu

III. 3*. f sei ein II-Ding. Es gibt ein II-Ding g, so daß für jedes x, bei dem mindestens ein y (I-Ding) mit $[f, \langle x, y\rangle] \neq A$ existiert, $[g, x]$ einem solchen y gleich ist.

verschärft [14]). Das unveränderte Axiomensystem (so wie es loc. cit. I und II verwendet

---

[12]) Das Axiomensystem ist auf Seite 224—226 loc. cit. I oder Seite 674—675 loc. cit. II angegeben.

[13]) D. h. wenn der durch f bestimmte Bereich (d. i. seine Basis, vgl. loc. cit. II, Seite 630) „nicht zu groß" ist (also in unserer Terminologie eine Menge ist), und der durch f' bestimmte Bereich in einem (durch $x = [g, y]$ vermittelten) Bilde desselben enthalten ist, so ist auch dieser durch f' bestimmte Bereich nicht zu groß. Man sieht, daß hierin sowohl das Aussonderungs-, als auch das Ersetzungsaxiom enthalten ist.

[14]) Zum Wohlordnungssatz ist noch dieses zu sagen: In unserem unveränderten Axiomensystem ist er in der folgenden, weitestgehenden Form beweisbar: Der Bereich aller I-Dinge Ω (in der naiv-mengentheoretischen Terminologie: die Menge aller Dinge) kann wohlgeordnet worden (loc. cit. II, S. 726). Im modifizierten System (III. 3*., IV. 2*. statt III. 3., IV. 2.) können wir nur zeigen (vgl. § 2, Kap. I): jede Menge (d. h. jede „nicht zu große" Menge) ist wohlordenbar.

Man sieht also, daß im modifizierten System auch die Gültigkeit des Wohlordnungssatzes wesentlich eingeengt ist (wohl auf das von der Mengenlehre in der Regel erwartete Maß) — dies ist erwähnenswert, da wir trotzdem aus der Widerspruchfreiheit desselben die des ursprünglichen Axiomensystems schließen werden.

wurde) wollen wir mit S bezeichnen; das durch Ersetzung von III. 3., IV. 2. durch III. 3*., IV. 2.* modifizierte aber mit S*.

Das Hauptziel unserer Überlegungen ist, wie bereits angedeutet wurde, der Nachweis, daß die Widerspruchfreiheit von S* die von S nach sich zieht [15]).

4. Im § 5 des Kap. II von loc. cit. I wurde bei Untersuchung der Kategorizitätsfrage [16]) des Axiomensystems S die folgende Feststellung gemacht: Da über die Werte von A, B und den Wertverlauf von $\langle x, y\rangle$ nichts bekannt ist, und auch darüber nichts, ob alle I-Dinge auch I II-Dinge sind, muß S, um kategorisch zu werden, jedenfalls eine diese Dinge normierende Erweiterung erfahren. Diese „Normierung" erfolgte mittels der folgenden Axiome:

VI. 1. Alle I-Dinge sind I II-Dinge. (IV. 1. wird hierdurch überflüssig.)

2. Es ist $A = 0$, $B = \{0\}$.

3. Es ist $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \langle x, y\rangle\}$ [17]).

Ferner wurde erörtert, daß die „absteigenden Mengenfolgen" im Interesse der Kategorizität gleichfalls verboten werden müssen. Hierzu diente dort ein Axiom VI. 4., das wir hier in etwas erweiterter (verschärfter!) Form übernehmen.

Zu diesem Zweck definieren wir zunächst:

Als Vorgänger eines II-Dinges f bezeichnen wir alle I-Dinge x und $[f, x]$ mit $[f, x] \neq A$. In Zeichen: $x \eta f$.

(Also in der Terminologie von loc. cit. II: Die Vorgänger bilden den Bereich $B(f) + |[f, B(f)]|$. Sie sind offenbar diejenigen I-Dinge, die man zur direkten Konstruktion von f (d. h. zu seiner „naiven" Definition durch Angabe aller seiner Werte) wirklich braucht). Nunmehr lautet unser Axiom:

VI. 4. Es gibt kein II-Ding $f \neq 0$ mit der folgenden Eigenschaft: zu jedem $x \varepsilon f$ existiert ein $y \varepsilon f$ mit $y \eta x$ und $y \neq B$ [18]).

---

[15]) Die Umkehrung ist trivial, da S* aus S folgt. Denn III. 3*. ist loc. cit. II als Satz 56 (Seite 728) bewiesen; [und IV. 2*. besagt in der dortigen Terminologie (wir ersetzen f, f' durch $H = B(f)$, $H' = B(f')$, die Mengen sind, wenn f, f' I II-Dinge sind): wenn $H' \lesssim |[g, H]|$ ist, so ist mit H auch H' eine Menge, und dies folgt aus der Schlußbehauptung von § 2 in Kap. II sowie Satz 10 b (Seite 685 und 695).

[16]) Ein Axiomensystem heißt kategorisch, wenn es vollständig ist, d. h. wenn jede weitere Aussage über das System aus ihm folgt oder mit ihm im Widerspruch steht. Vgl. hierüber loc. cit. I Seite 238.

[17]) Über $0, \{x\}, \{x, y\}$ vgl. Anm. [11]); $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ hat die für den „Paarbegriff" $\langle x, y\rangle$ unbedingt erforderliche Eigenschaft, daß es für x, y und x', y' nur dann übereinstimmt, wenn $x = x'$, $y = y'$ ist (vgl. Anm. [3])).

[18]) Die wesentliche Verschärfung gegenüber der Fassung loc. cit. I (Seite 239) ist, daß dort ε statt η stand. Die Vorgänger von x durch $y \varepsilon x$ (und nicht durch $y \eta x$) zu definieren, ist für Mengen und nicht für Funktionen sinngemäß (da die ersteren durch Angabe ihrer Elemente bestimmt sind, die letzteren aber nur durch den vollen Wertverlauf). Ein unerheblicher Unterschied dagegen ist, daß das genaue Analogon von VI. 4. loc. cit. I so gelautet hätte:

Es gibt kein II-Ding a mit der folgenden Eigenschaft:

Es ist für jede endliche Ordnungszahl (d. h. ganze Zahl) n

$$[a, n+1]\, \eta\, [a, n],\ [a, n] \neq B$$

($n+1$ unmittelbar auf n folgend heißt loc. cit. II $n \dotplus 1$, vgl. dort Seite 741—743). Wir zogen die Formulierung des Textes vor, weil in ihr der (erst mit Hilfe eines großen Apparates aus den Axiomen S* herleitbare) Begriff der endlichen Ordnungszahl nicht benutzt wird. Man kann zeigen, daß beide Formulierungen gleichwertig sind, sie drücken beide aus, daß, wenn man von irgendeinem II-Ding f ausgehend einen Vorgänger wählt, dann einen Vorgänger des Vorgängers usw. — das Verfahren einmal stehen bleiben muß (freilich muß diese Folge von Wahlakten durch ein II-Ding erfaßt werden können, vgl. loc. cit. I, Seite 239.) — Die Notwendigkeit der Ausnahme mit B in IV. 4. ergibt sich aus der Tatsache, daß $B \eta B$ ist. Denn wegen VI. 2. ist $[B, A] = B \neq A$.

Es wurde bereits a. a. O. gesagt, daß die Hinzunahme dieser Axiome zu S keine neuen Widersprüche erzeugt.

Die Frage der Kategorizität (zu der dies nicht das letzte Wort ist, vgl. a. a. O.) soll uns hier nicht näher beschäftigen. Zum Nachweise aber, daß die Widerspruchfreiheit von S* auch die von S nach sich zieht, wird die Axiomengruppe VI. eine wichtige Rolle spielen. Wir werden nämlich die genannte Behauptung beweisen, indem wir zeigen:

α) Wenn S* widerspruchsfrei ist, so ist es auch das System S* + VI.

β) Aus S* + VI. folgt S.

Somit hat die Widerspruchfreiheit von S* auch die von S zur Folge.

(Da übrigens offenbar aus S S* folgt, vgl. Anm. [15]), folgert man leicht weiter: wenn eines der drei Axiomensysteme S*, S, S + VI. widerspruchsfrei ist, sind es alle drei — vgl. § 2 des Kap. II dieser Arbeit —, und wie man sich leicht überzeugt, ist jedes von ihnen eine wesentliche Verschärfung des vorhergehenden.)

5. Es sei noch einiges darüber hinzugefügt, wieweit im nachfolgenden die Kenntnis der citierten Arbeiten I und II vorausgesetzt wird. I ist zwar insofern von Bedeutung für diese Überlegungen, als wir immer wieder an die dort entwickelten Gedanken über das Axiomatisieren der Mengenlehre anknüpfen mußten; immerhin ist in den nun folgenden sachlichen Ausführungen ihre Kenntnis nicht notwendig. Von II werden wir dagegen häufigen Gebrauch machen, aber stets unter genauem Hinweis auf die Stelle, die gerade benötigt wird. Eine gewisse Vertrautheit mit den Methoden von II werden wir freilich bei einigen Beweisen voraussetzen müssen.

Die Widerspruchfreiheitsbeweise.

I. Beweis von α.

1. Wir müssen zuerst erörtern, welche Resultate von loc. cit. II unverändert erhalten bleiben, wenn an Stelle von S das Axiomensystem S* zugrunde gelegt wird; d. h. welche Rolle dort die Ersetzung von III. 3., IV, 2., durch III. 3.*, IV. 2.* spielt. Dazu müssen die Kap. II—IX der genannten Arbeit nacheinander betrachtet werden.

Im Kap. II wird IV. 2. nur an den drei folgenden Stellen benützt (auf III. 3. kommt es nicht an, da III. 3.* mehr verlangt): bei der Schlußbehauptung von § 2, beim Beweise von Satz 1 b, und beim Beweise von Satz 4 b. Die Schlußbehauptung von § 2 folgt aber auch aus IV. 2., wenn darin g mit $[g, x] = x$ (Axiom II. 1.) gewählt wird (sie besagt: wenn φ I II-Ding und $\varphi \lesssim \psi$ ist, so ist auch φ I II-Ding). Bei den Sätzen 1 b, 4 b ist zu zeigen: $\left\{\begin{matrix} u, & - \\ v, & A \end{matrix}\right\}$ ist I II-Ding; wenn H, J I II-Dinge sind, so ist es auch $H + J$. Wegen $\left\{\begin{matrix} u, & - \\ v, & A \end{matrix}\right\} \lesssim \{u\}, H + J = S(\{H, J\})$ genügt es daher, zu zeigen, daß $\{x, y\}$ stets I II-Ding ist; die Anwendung der Schlußbehauptung von § 2 bzw. von Satz 8 b (der, wie wir sehen werden, nicht von IV. 2. abhängt) ergibt dann die Behauptung. Wenn für ein Paar x', y' mit $x' \neq y'$ $\{x', y'\}$ I II-Ding ist, so ist es jedes $\{x, y\}$ wegen $\{x, y\} = |[f, \{x', y'\}]|$, falls

$$[f, x'] = x, [f, y'] = y$$

ist, was offenbar durch $f = \left\{\begin{matrix} x', & - \\ x', & y \end{matrix}\right\}$ geleistet wird — wir brauchen nur Satz 10 b anzuwenden (der, wie wir sehen werden, nicht wesentlich von IV. 2. abhängt). Ein Paar

x', y' wie gewünscht zu finden ist aber leicht: für das I II-Ding f aus Axiom V. 1. existieren offenbar zwei verschiedene x', y' mit $x' \varepsilon f$, $y' \varepsilon f$, daher ist $\{x'\ y'\} \lesssim f$, also I II-Ding[19]).

Im Kap. III wird IV. 2. nur beim Beweise von Satz 10 b benutzt (wonach mit H auch $|[f, H]|$ I II-Ding ist); dies folgt aber, wie man sofort sieht, ebensogut aus IV. 2*.

In den Kap. IV und V (Theorie der wohlgeordneten Mengen und der Ordnungszahlen!) wird IV. 2. überhaupt nicht benützt.

Im Kap. VI wird IV. 2. erst in den §§ 3, 4. (Beweis des Wohlordnungssatzes!) benützt, deren Inhalt mit IV. 2. fällt. Immerhin behält Satz 56 (da er mit III. 3. gleichbedeutend ist) und der daraus folgende Satz 57 (das Auswahlprinzip!) Gültigkeit; wir werden weiter unten sehen, wie daraus (etwa mit der *Zermelo*schen Methode) der Wohlordnungssatz gefolgert werden kann.

Im Kap. VII geht IV. 2. in die §§ 2, 3 (Vergleichbarkeit der Mächtigkeiten) ein, und zwar indirekt, weil hier der Wohlordnungssatz (Satz 55) benützt wird. Immerhin sind die Sätze 62 a, b, 63, 67 von diesem ohne weiteres unabhängig. Da wir weiter unten (wie bereits erwähnt), den Wohlordnungssatz für Mengen (aber nicht für Bereiche, d. h. „zu große" Mengen) aus dem gültigen Satz 56 (Auswahlprinzip!) herleiten werden, behält Satz 64 a wenigstens für Mengen seine Gültigkeit, und $\mathbf{KZ}(H)$ bleibt für Mengen sinnvoll. Infolgedessen wird 64 b gegenstandslos, 64 c bleibt richtig, und mit ihm 65, 66. Der Satz 68 gilt für Mengen H, H' unverändert, ebenso 69 und die „Trichotomie" auf Seite 735. Die Schlußbemerkung des § 3 wird aber gegenstandslos bzw. hinfällig.

In den Kap. VIII und IX schließlich wird IV. 2. überhaupt nicht benützt, hier bleibt also alles gültig, mit einer einzigen Ausnahme: beim Beweise von Satz 88 (Kap. VIII, § 4) wird $\mathbf{KZ}(H)$ gebildet, also gilt er zunächst nur für Mengen H. Die auszufüllende Lücke wäre, zu zeigen: wenn H ein Bereich, aber keine Menge (kein I II-Ding) ist, so ist es einer echten Teilmenge von sich selbst äquivalent. Hierzu genügt es (vgl. den Beweis von 88) eine mit ω äquivalente Teilmenge von H anzugeben, was ohne weiteres geht [20]).

Zusammenfassend können wir also sagen: Aus S* folgen, ebensogut wie aus S, alle Resultate der Arbeit II, mit den folgenden Ausnahmen: Der Wohlordnungssatz gilt nicht in der Form von Satz 54, 55, sondern es gilt nur der auf Mengen bezügliche Teil von 55 (56, 57 behalten ihre Gültigkeit bei). Bei der Äquivalenz kann die Mächtigkeit (die Kardinalzahl von H, $\mathbf{KZ}(H)$) nur für Mengen H definiert werden, so daß Satz 64 a nur für Mengen gilt, 64 b fortfällt, und 65—69, sowie die Trichotomie (allgemeine Vergleichbarkeit) auf Seite 735 nur für Mengen gültig sind. Die Schlußbemerkung von § 3 im Kap. VII fällt aus dem gleichen Grunde fort.

Wir müssen aber noch den Beweis des Wohlordnungssatzes im genannten Umfange nachholen.

2. Es soll gezeigt werden: wenn H eine Menge ist, so gibt es eine Wohlordnung W von H. Da uns der Satz 57 zur Verfügung steht, oder noch besser die II-Dinge g, h aus Anm. [20]) (die wir freilich jetzt, wo H eine Menge ist, auf echte Teilmengen von

---

[19]) f hat ja unendlich viele Elemente, und wir brauchen ein I II-Ding mit zwei Elementen!

[20]) H sei Bereich, aber keine Menge. Wenn K eine Menge $\lesssim H$ so ist $K \neq H$, $H - K \neq 0$, also gibt es ein x mit $[H - K, x] \neq A$, d. h. $[H, x] \neq A, [K, x] = A$. Wenn wir dies auf die Form $[f, \langle H, x\rangle] \neq A$ bringen, und III. 3.* anwenden, so gewinnen wir ein g, so daß für jede Menge $K \lesssim H$ $[g, K]$ zu H aber nicht zu K gehört. Wenn wir also ein h mit $[h, K] = K + \{[g\ K]\}$ konstruieren, so haben wir stets

$$K < [h, K] \lesssim H$$

und $[h, K]$ ist wieder Menge und hat genau ein Element mehr als K, $[g, K]$.

Wir wenden nunmehr den (von IV. 2. unabhängigen) Satz 92 a an (Möglichkeit der Definition

H beschränken müssen), können wir den Wohlordnungssatz mit einer der *Zermelo*schen Methoden ohne weiteres beweisen. g, h haben nämlich die folgenden Eigenschaften: Wenn $K < H$ ist, so ist $K < [h, K] \lesssim H$, und $[h, K]$ hat genau ein Element mehr als K, und zwar ist dieses $[g, K]$. Am allerbequemsten kommen wir aber unter Benützung des Definierens durch transfinite Induktion ans Ziel, da der die Möglichkeit desselben gewährleistende Satz 90 (loc. cit. II) von IV. 2. unabhängig ist. Diese Beweismethode zeigt übrigens auch am klarsten, warum der Beweis für Nicht-Mengen H nicht gelingt.

Wir wählen das II-Ding φ aus Satz 90 so, daß für alle **0Z** (Ordnungszahlen) x (die gleichzeitig I II-Dinge sind) und alle I II-Dinge ν

$$[\varphi, \langle x, \nu\rangle] = [g, |[\nu, x]|]$$

gilt, was offenbar ohne weiteres geht. Insbesondere haben wir dann für jedes II-Ding ψ

$$\left[\varphi, \left\langle x, \left(\frac{\psi\,|\,0}{x}\right)\right\rangle\right] = \left[g, \left|\left[\left(\frac{\psi\,|\,0}{x}\right), x\right]\right|\right] = [g, |[\psi, x]|];$$

und Satz 90 behauptet daher die Existenz eines II-Dinges, für welches für alle **0Z** x

$$[\psi, x] = [g, |[\psi, x]|]$$

gilt. Es soll gezeigt werden, daß dieses ψ eine gewisse **0Z** P ein-eindeutig auf H abbildet, womit dann die Wohlordenbarkeit von H dargetan ist (es genügt $W = [\psi]\left(\frac{P}{\Omega^*}\right) \Sigma$ zu setzen [21]).

Diejenigen **0Z** x, (die gleichzeitig I II-Dinge sind), für die $|[\psi, x]| < H$ ist, nennen wir normal; die Normalität von x kann auf die Form $[j, x] \neq A$ gebracht werden [22], und wenn wir $\mathfrak{P}(j) = P$ setzen, so ist P ein Bereich, der die normalen **0Z** und nur diese umfaßt. Wenn x normal ist, und $y \varepsilon x$, so ist auch y normal, denn es ist y **0Z**, $y < x$, also $|[\psi, y]| \lesssim |[\psi, x]| < H$; somit folgt aus $x \varepsilon P$ $x \lesssim P$. Nach Satz 46 (loc. cit. II) ist daher P **0Z**. Wir werden zeigen, daß P die gewünschte Eigenschaft hat.

Seien x, y normal. Wenn $x < y$ ist, also $x \varepsilon y$, so haben wir: $[\psi, x] \varepsilon |[\psi, y]|$ und $|[\psi, y]| < H$, also ist $[\psi, y] = [g, |[\psi, y]|]$ nicht Element von $|[\psi, y]|$. Daher ist $[\psi, x] \neq [\psi, y]$; da hier x, y dieselbe Rolle haben, folgt dies auch aus $x > y$, also allgemein aus $x \neq y$. Weiter ist für normale x $|[\psi, x]| < H$ also $[\psi, x] = [g, |[\psi, x]|]$ Element von H. Somit bildet ψ die Menge P ein-eindeutig auf $|[\psi, P]| \lesssim H$ ab.

Da H eine Menge ist, ist es auch $|[\psi, P]|$, sowie das ihm äquivalente P; wäre nun $|[\psi, P]| \neq H$, so wäre P **0Z** und I II-Ding und $|[\psi, P]| < H$, also wäre es normal, d. h. $P \varepsilon P$, was mit P **0Z** unverträglich ist.

Damit ist $|[\psi, P]| = H$, d. h. die Äquivalenz von H und der **0Z** P — also der Wohlordnungssatz bewiesen.

Wenn H keine Menge ist, so gehen alle Schlüsse ebenso, bis auf den, nach dem P I II-Ding ist. Da schließen wir vielmehr so: Wäre P I II-Ding, so wäre es auch $|[\psi, P]|$, also $[\psi, P] \neq H$, woraus wie oben eine Unmöglichkeit folgt. Somit ist P kein I II-Ding,

---

durch vollständige, finite Induktion), u. zw. setzen wir

$$u = 0, [\varphi, \langle x, J\rangle] = [h, J]$$

(es ist leicht, ein solches φ zu h zu finden). Dann wird $[\chi, 0] = u$, $[\chi, x \dotplus 1] = [h, [\chi, x]]$ (x eine endliche Ordnungszahl).

Es ist leichter einzusehen, dass stets $[g, [\chi, x]] \varepsilon H$ ist, und daß aus $x \neq y$ $[g, [\chi, x]] \neq [g, [\chi, y]]$ folgt (x, y aus ω), was hier nicht weiter erörtert werde. Daher ist $|[g, |[\chi, \omega]|]|$ eine mit ω äquivalente Teilmenge von H. (Einen anderen Beweis hierfür geben wir im § 2 von Kap. I, vgl. Anm. [23]).

[21]) Zu den Bezeichnungen vgl. deren Zusammstellung loc. cit. II, Seite 671—673.

[22]) Wir müssen ausdrücken: „$|[\psi, x]| \varepsilon \mathfrak{P}(H)$, $|[\psi, x]| \neq H$“, was mit den Methoden der Arbeit II mühelos geht.

als **0Z** muß es also gleich Ω^{**} sein (Satz 47, loc. cit. II). Somit hat H eine zu Ω^{**} äquivalente Teilmenge ($|[\varphi, P]|$, $P = \Omega^{**}$), und weiter kommen wir nicht [23]). Auch die anderen Beweismethoden des Wohlordnungssatzes erlauben es uns nicht, diese wohlgeordnete Teilmenge von H noch wesentlich zu vergrößern.

3. Nunmehr gehen wir daran, die Behauptung α des § 4 der Einleitung zu beweisen. Als erste Etappe hierzu zeigen wir: wenn S* widerspruchfrei ist, so ist es auch S* + VI. 2. Sei also Φ ein System (d. h. zwei Dinge A, B zwei Klassen I und II von Dingen, und zwei Operationen $[f, x]$ und $\langle x, y\rangle$), das S* erfüllt; es gilt dann, ein neues System Φ' zu konstruieren (d. h. zwei Dinge A', B', zwei Klassen I', II', und zwei Operationen $[f, x]'$, $\langle x, y\rangle'$), das S* + VI. 2. genügt.

Über S* hinausgehend muß also in Φ' gelten: $A' = 0'$, $B' = \{0'\}'$[24]), d. h. $[A', x]' = A$ (für jedes I-Ding x), $[B', A']' = B'$, $[B', x]' = A'$ (für jedes I-Ding $x \neq A'$).

Dies erreichen wir folgendermaßen. A', B' setzen wir gleich $0, \{0\}$ [25]), die I'- und II'-Dinge seien bezw. die I- und II-Dinge: $\langle x, y\rangle' = \langle x, y\rangle$. Die Definition von $[f, x]'$ aber ist diese: es gibt gewiß ein II-Ding φ, für welches zu jedem I-Ding x genau ein I-Ding y mit $x = [\varphi, y]$ existiert, und $[\varphi, A] = 0$, $[\varphi, B] = \{0\}$ ist; sowie ein II-Ding ψ, so daß $x = [\varphi, y]$ mit $y = [\psi, x]$ gleichbedeutend ist (φ, ψ sind zueinander invers [26])), dann sei $[f, x]' = [\varphi, [f, x]]$.

Daß für jedes I-Ding (d. h. I'-Ding) y $[f, y]' = [\bar{f}, y]$ gilt, bedeutet $[\bar{f}, y] = [\varphi, [f, y]]$ oder auch $[f, y] = [\psi, [\bar{f}, y]]$. Daher kann zu jedem f ein $\bar{f}$ und zu jedem $\bar{f}$ ein f gefunden werden (diese sind II-Dinge, d. h. II'-Dinge), so daß die obige Relation gilt. Außerdem bestimmen sich f, $\bar{f}$ gegenseitig eindeutig (nach Axiom I. 4.).

Aus diesen Bemerkungen folgert man ohne besondere Schwierigkeiten, daß Φ' (ebenso wie Φ) allen Axiomen von S* genügt. Aber auch die darüber hinausgehenden Bedingungen sind erfüllt:

$$[A', x]' = [0, x]' = [\varphi, [0, x]] = [\varphi, A] = 0 = A',$$
$$[B', A']' = [\{0\}, 0]' = [\varphi, [\{0\}, 0]] = [\varphi, B] = \{0\} = B',$$
$$[B', x]' = [\{0\}, x]' = [\varphi, [\{0\}, x]] = [\varphi, A] = 0 = A'$$

(das letztere für $x \neq 0$, d. h. $\neq A'$).

---

[23]) Hiermit gewinnen wir noch einmal das Resultat von Anm. [20]): wenn H keine Menge ist, so hat es eine mit Ω^{**}, und um so mehr eine mit ω äquivalente Teilmenge.

[24]) Man beachte, daß $0'$ in Φ' von 0 in Φ verschieden sein kann, und ebenso die Operationen $\{x\}'$, $\{x, y\}'$ in Φ' von den Operationen $\{x\}$, $\{x, y\}$ in Φ; können doch alle wesentlichen Bestandteile von Φ' anders definiert sein als die von Φ. Dies gilt auch noch, wenn I'- und II'-Dinge sowie I- und II-Dinge dasselbe sind.

[25]) $0, \{0\}$ aus Φ, nicht etwa aus dem erst zu definierenden Φ'.

[26]) φ ist, wie man sich leicht überlegt, gewiß vorhanden, wenn man einem II-Dinge an vier Stellen vier Werte vorschreiben kann, und sonst $[\varphi, x] = x$ gilt. Seien die vier Stellen a, b, c, d, die Werte a', b' c', d'. Dann bilden wir:

$$\varphi' = \left\{\begin{matrix} a, - \\ a', b' \end{matrix}\right\}, \quad \varphi'' = \left\{\begin{matrix} c, - \\ c', d' \end{matrix}\right\}, \quad \varphi''' = \left(\frac{\varphi' \mid \varphi''}{\{a, b\}}\right)$$

φ''' hat bereits an den Stellen $a. b, c, d$ die Werte a', b', c', d'. Sodann sei $[\varphi^{IV}, x] = x$ (nach Axiom II. 1.), dann leistet

$$\varphi = \left(\frac{\varphi''' \mid \varphi^{IV}}{\{a, b\} + \{c, d\}}\right)$$

alles Gewünschte. Die Existenz des ψ folgt aus der von φ sofort: es genügt a, b, c, d und a', b', c', d' miteinander zu vertauschen.

Wir zeigen weiter, daß auch S* + VI. 2., 3. widerspruchfrei ist, d. h. wir konstruieren ein System Φ'' (bestehend aus A'', B'' den Klassen I'', II'', und den Operationen $[f, x]''$, $\langle x, y\rangle''$), das S* + VI. 2., 3. genügt.

Es seien A'', B'', I'', II'', $[f, x]''$ mit A', B', I', II', $[f, x]'$ übereinstimmend, dagegen $\langle x, y\rangle'' = \{\{x\}', \{x, y\}'\}'$. Auf Grund der Überlegungen von loc. cit. II, Seite 698 (die auf Φ', das ja S* genügt, anwendbar sind) gibt es zwei II'-Dinge f, g, so daß

$$[f, \langle x, y\rangle']' = \{\{x\}', \{x, y\}'\}', [g, \{\{x\}', \{x, y\}'\}']' = \langle x, y\rangle'$$

gilt, d. h.

$$[f, \langle x, y\rangle']' = \langle x, y\rangle'', [g, \langle x, y\rangle'']' = \langle x, y\rangle'.$$

Hieraus folgt sofort, daß auch Φ'' dem S* genügt.

Da ferner die Definition von $A'', B'', [f, x]''$ dieselbe ist, wie die von $A', B', [f, x]'$, genügt Φ'', ebenso wie Φ' VI. 2. Aus dem gleichen Grunde stimmt insbesondere $\{\{x\}'', \{x, y\}''\}''$ mit $\{\{x\}', \{x, y\}'\}'$ überein, also gilt

$$\langle x, y\rangle'' = \{\{x\}'', \{x, y\}''\}''.$$

Somit erfüllt Φ'' auch VI. 3., womit alles bewiesen ist,

4. Es bleibt übrig, die Widerspruchfreiheit von S* + VI. zu beweisen; sei also Φ ein S* + VI. 2, 3. genügendes System, (bestehend aus A, B, I, II, $[f, x], \langle x, y\rangle$), es gilt ein Φ' (bestehend aus A', B', I', II', $[f, x]', \langle x, y\rangle'$) zu konstruieren, das außer S* + VI. 2., 3. auch noch VI. 1., 4. befriedigt. Wir werden dabei $A' = A, B' = B$, $[f, x]' = [f, x], \langle x, y\rangle' = \langle x, y\rangle$ belassen, und nur den Begriff der I- und II-Dinge wesentlich einengen, um bzw. die I'- und II'-Dinge zu gewinnen.

Zuerst müssen wir aber die Struktur von Φ etwas näher untersuchen. —

Wir wählen ein festes I II-Ding f, so daß für alle Mengen H $[f, H] = H^{II}$ (Satz 13 b loc. cit. II) gilt; und definieren dann durch transfinite Induktion (Satz 90 loc. cit. II) eine Funktion ψ, wobei die Funktion φ des Satzes 90 so zu wählen ist, daß für alle I II-Dinge x und ν

$$[\varphi, \langle x, \nu\rangle] = \mathcal{S}(|[f, |[\nu, x]|)| + \{0, \{0\}\}$$

gilt [27]). Insbesondere wird dann für jedes II-Ding ψ

$$\left[\varphi, \left\langle x, \left(\frac{\psi|0}{x}\right)\right\rangle\right] = \mathcal{S}\left(\left|\left[f, \left|\left[\left(\frac{\psi|0}{x}\right), x\right]\right|\right]\right|\right) + \{0, \{0\}\} = \mathcal{S}(|[f, |[\psi, x]|]|) + \{0, \{0\}\},$$

für das ψ von Satz 90 gilt also (x eine beliebige $\mathbf{0Z}$)

$$[\psi, x] = \mathcal{S}(|[f, |[\psi, x]|]|) + \{0, \{0\}\}$$

(vgl. die Bemerkung in Anm. [27])).

Wir beweisen nun nacheinander:

Satz 1. Alle $[\psi, x], x\,\mathbf{0Z}$, sind Mengen.

Beweis: Daß $[\psi, x], x\,\mathbf{0Z}$, keine Menge ist, bedeutet $x \varepsilon \Omega^{**}$, $[\Omega^*, [\psi, x]] = A$, was ohne weiteres auf die Form $[h, x] \neq A$ gebracht werden kann. $H = \mathfrak{B}(h)$ ist daher der Bereich aller dieser x. Es ist $H \lesssim \Omega^{**}$, und wenn es solche x gibt, $H \neq 0$. Dann

---

[27]) Da $\mathcal{S}(|[f, |[\nu, x]|)|$ nur dann Sinn hat, wenn alle Elemente von $|[f, |[\nu, x]|]|$ Mengen sind, d. h. also wenn alle $y \varepsilon |[\nu, x]|$ es sind (denn dann sind es ja die $z = [f, y] = y^y$ von selber), müssen wir eigentlich so vorgehen: sei g ein II-Ding, so daß für alle Mengen von Mengen H $[g, H] = \mathcal{S}(H)$ ist (Satz 8 b loc. cit. II), dann verlangen wir

$$[\varphi, \langle x, \nu\rangle] = [g, |[f, |[\nu, x]|]|] + \{0, \{0\}\},$$

(das Zeichen + sollte ebenso behandelt werden, ferner gilt dasselbe für x^x).

hat das nach $\left(\frac{H}{\Omega^*}\right) \Sigma$ geordnete H ein erstes Element, es heiße x; dann gehört x zu H, aber keine $\mathbf{0Z}$ $y < x$, d. h. $y \varepsilon x$.

Somit sind alle Elemente u von $|[\psi, x]|$ gleich $[\psi, y]$, $y \varepsilon x$, also Mengen, und $[f, u] = u^u$, also ebenfalls eine Menge. Alle Elemente von $|[f, |[\psi, u]|]|$ sind also Mengen, und folglich

$$[\psi, x] = S(|[f, |[\psi, x]|]|) + \{0, \{0\}\}$$

(vgl. Anm. [27])); also ist $[\psi, x]$ eine Menge, x gehört auch nicht zu H, was ein Widerspruch ist.

Satz 2. Es sei x, y $\mathbf{0Z}$, $x < y$, dann ist

$$[\psi, x]^{[\psi, x]} \lesssim [\psi, y], \quad \text{und} \quad [\psi, x] \lesssim [\psi, y].$$

Beweis: Es ist $x \varepsilon y$, $[\psi, x] \varepsilon |[\psi, y]|$, $[\psi, x]^{[\psi, x]} = [f, [\psi, x]]$ Element von $|[f, |[\psi, y]|]|$, und somit $\lesssim S(|[f, |[\psi, y]|]|) < [\psi, y]$.

Ferner hat $x \lesssim y$ offenbar $S(|[f_1|[\psi, x]|]|) + \{0, \{0\}\} \lesssim S(|[f, |[\psi, y)|)|) + \{0, \{0\}\}$, d. h. $[\psi, x] \lesssim [\psi, y]$ zur Folge.

Definition. Wir bilden den Bereich $\Pi = S[|[\psi, \Omega^{**}]|]$, dessen Elemente somit alle Elemente aller $[\psi, x]$, x $\mathbf{0Z}$, sind.

Satz 3. Es ist

$$\Pi^{\Pi} \lesssim \Pi \text{ [28])}.$$

Beweis: Es ist zu zeigen: wenn f zu Π^{Π} gehört, d. h. wenn es ein I II-Ding ist und alle x, $[f, x]$ mit $[f, x] \neq A$ zu Π gehören, so gehört auch f zu Π. Oder auch (vgl. die Definition im § 4 der Einleitung): wenn alle Vorgänger des I II-Dinges f zu Π gehören, so gehört es selbst zu Π. In einer dritten Formulierung (vgl. ebendort): wenn f I II-Ding und $\mathfrak{B}(f) + |[f, \mathfrak{B}(f)]| \lesssim \Pi$ ist, so ist $f \varepsilon \Pi$.

Wenn für irgendeine $\mathbf{0Z}$ x $\mathfrak{B}(f) + |[f, \mathfrak{B}(f)]| \lesssim [\psi, x]$ ist, so ist (wie man sich leicht überlegt) $f \varepsilon [\psi, x]^{[\psi, x]}$, also $f \varepsilon [\psi, x \dotplus 1]$ (wegen $x < x \dotplus 1$ und Satz 2), und daher $f \varepsilon \Pi$, wie behauptet wurde. Es genügt somit, $\mathfrak{B}(f) + |[f, \mathfrak{B}(f)]| \lesssim [\psi, x]$ zu beweisen.

Nun ist mit f auch $\mathfrak{B}(f) + |[f, \mathfrak{B}(f)]|$ ein I II-Ding, also ist es eine Menge, ferner nach Annahme $\lesssim \Pi$; wir werden allgemeiner beweisen: wenn für eine Menge $H \lesssim \Pi$ gilt, so ist auch $H \lesssim [\psi, x]$ (für eine geeignete $\mathbf{0Z}$ x).

Jedes $u \varepsilon H$ gehört ja zu Π, also zu einem $[\psi, x]$, x $\mathbf{0Z}$; wir können x $\mathbf{0Z}$, $u \varepsilon [\psi, x]$ unschwer auf die Form $[j, \langle u, x \rangle] \neq A$ bringen, dann gibt es zu jedem $u \varepsilon H$ ein x, so daß diese Relation besteht. Wenn wir hierauf III. 3.* anwenden, so haben wir also: für jedes $u \varepsilon H$ ist $[k, u]$ $\mathbf{0Z}$, $u \varepsilon [\psi, [k, u]]$. Sei nunmehr $\mathfrak{H} = |[k, H]|$, dann ist $\mathfrak{H}$ eine Menge (weil H eine ist), $\mathfrak{H} \lesssim \Omega^{**}$ und $H \lesssim |[\psi, \mathfrak{H}]|$.

Da H eine Menge von $\mathbf{0Z}$ ist, ist $x = S(\mathfrak{H})$ eine $\mathbf{0Z}$ und I II-Ding (Satz 81c loc. cit. II); für jedes $y \varepsilon \mathfrak{H}$ haben wir $y \lesssim S(\mathfrak{H}) = x$, $[\psi, y] \lesssim [\psi, x]$ (Satz 2). Daher ist $|[\psi, \mathfrak{H}]| \lesssim [\psi, x]$, $H \lesssim [\psi, x]$, womit alles bewiesen ist.

Zusatz. Auch $A = 0$ und $B = \{0\}$ gehören zu Π, darum ist $\mathfrak{P}(\Pi) \lesssim \Pi$ (vgl. Anm. [28])).

---

[28]) Für Mengen H (die mehr als ein Element enthalten) ist $H^H \lesssim H$ auf Grund des bekannten Mächtigkeitssatzes ausgeschlossen; wohl aber kann für Bereiche, die keine Mengen sind, diese Relation gelten, so ist z. B. $\Omega\Omega \lesssim \Omega$. Satz 3 hat also die Konsequenz, daß Π keine Menge sein kann.

Beweis: Jedes $[\psi, x]$ enthält 0 und $\{0\}$ (nach der definierenden Relation des ψ), also auch Π. Folglich ist

$$P(\Pi) = \{A, B\}^{\Pi} \lesssim \Pi^{\Pi} \lesssim \Pi.$$

5. Wir fahren mit der Untersuchung von Π fort.

Wenn u zu Π gehört, so gehört es einem $[\psi, x]$, $x \mathbf{0Z}$ an; wir können $x \mathbf{0Z}$, $u \varepsilon [\psi, x]$ auf die Form $[f, x] \neq A$ bringen (f hängt von u ab) und $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}(f)$ setzen, dann ist H der Bereich aller $x \mathbf{0Z}$ mit $u \varepsilon [\psi, x]$. Daher ist $\mathfrak{H} < \Omega^{**}$, $\mathfrak{H} \neq 0$, und das nach $\left(\frac{\mathfrak{H}}{\Omega^*}\right) \Sigma$ geordnete $\mathfrak{H}$ hat ein erstes Element. Dieses heiße x, dann gehört x zu $\mathfrak{H}$, und für jedes y von $\mathfrak{H}$ gilt $x < y$; also: $x \mathbf{0Z}$, $u \varepsilon [\psi, x]$, und aus $y \mathbf{0Z}$, $u \varepsilon [\psi, y]$ folgt $x \lesssim y$.

Es ist nicht schwer, diese, x offenbar eindeutig festlegende Relation zwischen u und x auf die Form $[f, \langle u, x \rangle] \neq A$ zu bringen; nach III. 3. (um so mehr nach III. 3.*!) gibt es somit ein II-Ding g, so daß für jedes u dieses x gleich $[g, u]$ ist.

Definition. Zu jedem u von Π gehört nach dem soeben Gesagten ein und nur ein x mit den folgenden Eigenschaften:

$$x \mathbf{0Z}, u \varepsilon [\psi, x], \text{ aus } y \mathbf{0Z}, u \varepsilon [\psi, y] \text{ folgt } x \lesssim y.$$

Dieses x nennen wir den Grad von u, in Zeichen: $\mathrm{G}(u)$ [29]). Wie soeben gezeigt wurde, gibt es ein II-Ding g, so daß stets $\mathrm{G}(u) = [g, u]$ ist.

Satz 4. Wenn $u \eta v$ ist (u Vorgänger von v), u, v von Π, so ist entweder $u = A$, oder $u = B$, oder $\mathrm{G}(u) < \mathrm{G}(v)$.

Beweis: Es genügt, zu zeigen: wenn $u \eta v$, u, v von Π, $u \neq A$, $u \neq B$ ist, und $v \varepsilon [\psi, x]$, so gibt es ein $y < x$ ($x, y \mathbf{0Z}$) mit $u \varepsilon [\psi, y]$. Wir können dann $x = \mathrm{G}(v)$ setzen, es muß $\mathrm{G}(u) \lesssim y < x = \mathrm{G}(v)$ sein.

Sei also $v \varepsilon [\psi, x]$, d. h. $v \varepsilon \mathfrak{S}(|[f, |[\psi, x]|]|) + \{0, \{0\}\}$. Dann ist entweder $v \varepsilon \{0, \{0\}\}$, oder $v \varepsilon \mathfrak{S}(|[f, |[\psi, x]|]|)$. Im ersten Falle ist $v = 0$ oder $v = \{0\}$, 0 hat gar keine Vorgänger; $\{0\}$ nur 0 und $\{0\}$; d. h. A und B; also wäre dann $u = A$ oder $u = B$ entgegen der Annahme. Im zweiten Falle ist $v \varepsilon [f, [\psi, y]]$, $y \varepsilon x$, d. h. $v \varepsilon [\psi, y]^{[\psi, v]}$, $y \mathbf{0Z}$, $y < x$. Daher gehört jeder Vorgänger von v zu $[\psi, y]$ (dies folgt aus der Definition des Vorgängers), also insbesondere $u \varepsilon [\psi, y]$. Damit ist alles bewiesen.

Satz 5. Es gibt kein II-Ding $f \lesssim \Pi$, $f \neq 0$ mit der folgenden Eigenschaft: zu jedem $x \varepsilon f$ gibt es ein $y \varepsilon f$ mit $y \eta x$ und $y \neq B$ [30]).

Beweis: Wenn $A \varepsilon f$ ist, so sind wir sofort fertig: da $A = 0$ überhaupt keine Vorgänger hat, können wir $x = A$ setzen, schon $y \eta x$ ist dann unmöglich. Es sei also nicht $A \varepsilon f$. Wäre unser Satz falsch, so gäbe es zu jedem $x \varepsilon f$ ein $y \varepsilon f$ mit $y \eta x$ und $y \neq A$ (da $y \varepsilon f$ und nicht $A \varepsilon f$ ist), $y \neq B$; also nach Satz 4 mit $\mathrm{G}(y) < \mathrm{G}(x)$.

Wir wählen g nach der Definition von $\mathrm{G}(u)$ und setzen $\mathfrak{H} = |[g, \mathfrak{B}(f)]|$; es ist offenbar $\mathfrak{H} \lesssim \Omega^{**}$ und $\mathfrak{H} \neq 0$ (wegen $f \neq 0$). Trotzdem gibt es zu jedem $R \varepsilon \mathfrak{H}$ ein $S \varepsilon \mathfrak{H}$ mit $s < r$ (weil $\mathfrak{H}$ der Bereich aller $\mathrm{G}(u) = [g, u]$, $u \varepsilon f$ ist), und dies ist unmöglich, da das nach $\left(\frac{\mathfrak{H}}{\Omega^*}\right) \Sigma$ geordnete $\mathfrak{H}$ ein erstes Element haben muß.

Jetzt erst sind wir in der Lage, Φ' endgültig zu beschreiben, d. h. anzugeben, was I′-Ding und was II′-Ding sein soll. Wir definieren: I′-Dinge nennen wir die Elemente von Π (sie sind also auch I-Dinge), II′-Dinge alle II-Dinge f, für die alle Vorgänger

---

[29]) Dieser Begriff des „Grades“ entspricht dem *Russell*schen Begriff der „Stufe“, in einer konsequent aufgebauten und den „Cantorschen Umfang“ erreichenden Mengenlehre kann man nicht vermeiden, alle (transfiniten!) Ordnungszahlen als „Grade“ (= „Stufen“) zuzulassen.

[30]) Das ist das Axiom VI. 4., aber vorläufig nur für II-Dinge $f \lesssim \Pi$ formuliert.

I′-Dinge sind (d. h. jedes x und $[f, x]$, $[f, x] \neq A$, zu Π gehört oder auch $\mathfrak{B}(f) + |[f, \mathfrak{B}(f)]| \lesssim \Pi$ gilt). Wir stellen fest: A, B sind I′-Dinge (vgl. Zusatz zu Satz 3); wenn f ein II′-Ding und x ein I′-Ding ist, so ist $[f, x]$ ein I′-Ding (für $[f, x] \neq A$ nach Definition der II′-Dinge, für $[f, x] = A$ nach der ersten Bemerkung); wenn x, y I′-Dinge sind, so ist auch $\langle x, y\rangle$ ein I′-Ding (denn es ist $= \{\{x\}, \{x, y\}\}$, also Element von $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\{x, y\}))$, und wegen $\{x, y\} \lesssim \Pi$ ist auch die letztere Menge $\lesssim \Pi$, vgl. Zusatz zu Satz 3). Ferner zeigen wir: jedes II′-Ding, das gleichzeitig I-Ding ist, ist auch I′ II′-Ding. Denn es ist I II-Ding, und alle seine Vorgänger gehören zu Π, also gehört es zu Π^{Π}, d. h. nach Satz 3 zu Π, ist also auch I′-Ding. Und schließlich: alle I′-Dinge sind auch I′ II′-Dinge. Denn zunächst folgt aus $u \varepsilon \Pi$ $u \varepsilon [\psi, x]$, $x \mathbf{0Z}$, also $u \varepsilon \mathfrak{S}(|[f, |[\psi, x]|]|) + \{0, \{0\}\}$, d. h. $u \varepsilon [\psi, y]^{[\psi, y]}$, $y \varepsilon x$ (also $y \mathbf{0Z}$) oder $u = 0$ oder $u = \{0\}$, so daß u auf alle Fälle I II-Ding ist. Weiter gehören alle Vorgänger von u auch zu Π (je nach dem, welche der oben genannten drei Möglichkeiten eintritt, gehören sie alle zu $[\psi, y]$, bezw. gibt es keine, bezw. sind sie 0 und $\{0\}$, d. h. A und B — also ebenfalls Elemente von Π), also ist u ein II′-Ding, und daher auch I′ II′-Ding.

Wenn wir noch beachten, daß A, B, $[f, x]$, $\langle x, y\rangle$ in Φ' ebenso sind, wie in Φ, so kann man leicht verifizieren, daß Φ' ebenso wie Φ die Bedingungen von S* erfüllt —, und weil mit den obigen Begriffsbildungen auch 0, $\{x\}'$, $\{x, y\}'$ in Φ' und Φ übereinstimmen, gilt dasselbe für die Bedingungen VI. 2., 3. Wegen der letzten Bemerkung des vorigen Absatzes kommt aber Φ' auch noch die Eigenschaft VI. 1. zu, und wegen Satz 5 auch VI. 4.

Damit ist die Widerspruchfreiheit von S* + VI. aus der von S* hergeleitet, d. h. die Behauptung α restlos bewiesen.

II. *Beweis von β.*

1. Es gilt β zu beweisen, d. h. zu zeigen, daß ein System Φ (bestehend aus A, B, I, II, $[f, x]$, $\langle x, y\rangle$), das die Bedingungen S* + VI. erfüllt, auch S erfüllen muß. Da aber III. 3. weniger aussagt, als III. 3.*, handelt es sich bloß darum, IV. 2. zu beweisen. Da Φ insbesondere die Eigenschaften S* + VI. 2., 3. besitzt, werden wir von den Entwicklungen der §§ 4, 5 (beim letzteren natürlich nur bis zu Satz 5, einschließlich) von Kap. I Gebrauch machen.

Wir zeigen zuerst (dieser Satz gilt natürlich nur, weil auch VI. 1., 4. erfüllt sind):

Satz 6: Es ist $\Pi = \Omega$ [31]).

Beweis: Sonst wäre das II-Ding $f = \Omega - \Pi \neq 0$. Nach VI. 4. gibt es ein $x \varepsilon f$, d. h. $x \varepsilon \Omega - \Pi$, so daß für kein $y \varepsilon f$, d. h. $y \varepsilon \Omega - \Pi$, gilt $y \eta x, y \neq B$. Wegen $B \varepsilon \Pi$ können wir auch sagen: aus $y \eta x$ folgt $y \varepsilon \Pi$. Da x ein I II-Ding ist, bedeutet dies (wie man sich leicht überlegt) $x \varepsilon \Pi^{\Pi}$ also (Satz 3) $x \varepsilon \Pi$. Dies widerspricht aber $x \varepsilon \Omega - \Pi$.

Satz 7. Es gibt eine Wohlordnung W von Φ, so daß alle $\mathfrak{Abs}(u; \Omega, W)$ (u ein I-Ding) Mengen sind,

Beweis: Sei $x \varepsilon \Omega^{**}$, wir können $x = \mathrm{G}(u)$ auf die Form $[f, u] \neq A$ bringen (f von x abhängig), und $H_x = \mathfrak{B}(f)$ setzen; dann ist H_x der Bereich aller u mit $\mathrm{G}(u) = x$. Daraus folgt $H_x \lesssim [\psi, x]$, also ist H_x eine Menge, es ist leicht, ein II-Ding h mit $[h, x] = H_x$ (für alle $x \varepsilon \Omega^{**}$, h unabhängig von x) ausfindig zu machen. Jedes I-Ding u gehört offenbar einem und nur einem H_x an ($x = \mathrm{G}(u)$).

---

[31]) Man beachte, daß im § 5 des Kap. I umgekehrt die Gültigkeit von VI. 4. durch Einengen von Ω (d. h der I-Dinge) auf den Umfang von Π erzwungen wurde.

Da H_x eine Menge ist, ist es wohlordenbar, wir können die Menge $\mathfrak{WO}(H_x)$ bilden, und es ist $\mathfrak{WO}(H_x) \neq 0$ (vgl. § 4 im Kap. VI loc. cit. II, sowie unsere Bemerkungen dazu, in den §§ 1, 2 des Kap. I dieser Arbeit). Wir können leicht ein II-Ding k mit $\mathfrak{WO}(H_x) = [k, x]$ finden (Satz 28 loc. cit. II), und wenn wir j nach Satz 57 loc. cit. II (Auswahlprinzip!) wählen, so ist $W_x = [j, \mathfrak{WO}(H_x)] = [j, [k, x] = [l, x]$ für jedes $x \varepsilon \Omega^{**}$ ein Element von $\mathfrak{WO}(H_x))$, also eine Wohlordnung von H_x.

Wir werden eine Ordnung W von Ω konstruieren, bei der $u \dot{<} v \ldots (W)$ damit gleichbedeutend ist, daß entweder $\mathrm{G}(u) < \mathrm{G}(v)$ ist, oder $\mathrm{G}(u) = \mathrm{G}(v)$, also u, v demselben $H_x(x) = \mathrm{G}(u) = \mathrm{G}(v)$ angehörig), und $u \dot{<} v \ldots (W_x)$. Zuerst zeigen wir aber, daß dieses W die gewünschten Eigenschaften hat.

Da die $\mathrm{G}(u)$ zu Ω^{**} gehören, und $\left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^{*}}\right) \Sigma \mathfrak{WO} \Omega^{**}$ ist, sowie alle $W_x \mathfrak{WO} H_x$, zeigt man auf die in der „naiven" Mengenlehre gewohnte Art, daß W eine Wohlordnung von Ω ist. Weiter ist für $\mathrm{G}(v) > \mathrm{G}(u)$ gewiß $v \dot{>} u \ldots (W)$, also folgt aus $v \dot{<} u \ldots (W)$ $\mathrm{G}(v) \lesssim \mathrm{G}(u)$, $\mathrm{G}(v) \varepsilon \mathrm{G}(u) \dot{+} 1$. Somit ist jedes $v \varepsilon \mathfrak{Abs}(u; \Omega, W)$ Element eines $H_x = [h, x]$, $x \varepsilon \mathrm{G}(u) \dot{+} 1$, also $\mathfrak{Abs}(u; \Omega, W) \lesssim |[h, \mathrm{G}(u) \dot{+} 1]|$. Wegen $\mathrm{G}(u) \varepsilon \Omega^{**}$ sind also $\mathrm{G}(u) \dot{+} 1$, $|[h, \mathrm{G}(u) \dot{+} 1)|$ und $\mathfrak{Abs}(u; \Omega, W)$ lauter Mengen, womit alles bewiesen ist.

Es bleibt noch übrig, das gewünschte W wirklich herzustellen. Es muß erstens alle $\langle u, v \rangle$ mit $\mathrm{G}(u) < \mathrm{G}(v)$ enthalten, d. h. alle Elemente der Mengen $|\langle H_x, H_y \rangle|$, $x, y \varepsilon \Omega^{**}$, $x < y$ und zweitens alle $\langle u, v \rangle$ mit $\mathrm{G}(u) = \mathrm{G}(v) = x$, $u \dot{<} v \ldots (W_x)$, d. h. alle Elemente der Mengen W_x, $x \varepsilon \Omega^{**}$. Einen solchen Bereich können wir natürlich ohne weiteres konstruieren.

Satz 8. Es ist $\Omega \approx\!\!< \Omega^{**}$.

Beweis: Wenn wir W nach Satz 7 wählen, so ist $W \mathfrak{WO} \Omega$ und $\mathbf{Z} \Omega, W$ (Satz 41 loc. cit. II), wir können also $\mathbf{0Z}(\Omega, W) = P$ bilden. Es ist $\Omega, W \approx P$, $\left(\frac{P}{\Omega^{*}}\right) \Sigma$, also $\Omega \approx\!\!< P$. Ω ist keine Menge (vgl. den Beweis loc. cit. II nach Anm. [17]) und [5]), wobei IV. 2. nicht benützt wird! — oder auch weil Ω^{**} keine Menge ist [Satz 47 loc. cit. II] und $\Omega^{**} \lesssim \Omega$ gilt), also auch P nicht; da aber $P \mathbf{0Z}$ ist, muß $P = \Omega^{**}$ sein (Satz 47 loc. cit. II). Also ist $\Omega \approx\!\!< \Omega^{**}$, wie behauptet wurde. —

Der Satz 8 ermöglicht uns aber das Erfülltsein der Bedingung IV. 2. zu beweisen.

Sei erstens f ein II-Ding, aber kein I II-Ding. Es sei $H = \mathfrak{B}(f)$ (H Bereich aber nicht Menge), und die äquivalente Abbildung von Ω auf Ω^{**} sei g, $\Phi \approx\!\!< \Phi^{**} \ldots (g)$. Es sei $\mathfrak{H} = |[g, H]|$, dann ist $H \approx\!\!< \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H} \lesssim \Omega^{**}$. Aus $\mathfrak{H} \lesssim \Omega^{**}$ und $\mathbf{Z} \Omega^{**}$, $\left(\frac{\Omega^{**}}{\Omega^{*}}\right) \Sigma$ folgt (nach Satz 50 loc. cit. II) $\mathbf{Z} H$, $\left(\frac{\mathfrak{H}}{\Omega^{*}}\right) \Sigma$, wir können daher $\mathbf{0Z}(\mathfrak{H}, \left(\frac{\mathfrak{H}}{\Omega^{*}}\right) \Sigma) = P$ setzen. Dann ist $\mathfrak{H}, \left(\frac{\mathfrak{H}}{\Omega^{*}}\right) \Sigma \approx P$, $\left(\frac{P}{\Omega^{*}}\right) \Sigma$, $\mathfrak{H} \approx\!\!< P$; also ist $H \approx\!\!< P$. Da H keine Menge ist, ist auch P keine, wegen $P \mathbf{0Z}$ ist somit $P = \Omega^{**}$. Daher gilt $\mathfrak{H} \approx\!\!< \Omega^{**}$, und wegen $\Omega \approx\!\!< \Omega^{**}$ $H \approx\!\!< \Omega$; sei h die äquivalente Abbildung von H auf Ω, $H \approx\!\!< \Omega \ldots (h)$. Dann gibt es, wie IV. 2. verlangt, zu jedem x (natürlich $x \varepsilon \Omega$) ein $y \varepsilon H$ (also $[f, y] \neq A$) mit $[g, y] = x$.

Zweitens sei f ein II-Ding, und es gebe (im Sinne von IV. 2.) ein II-Ding g, so daß zu jedem x ein y mit $[f, y] \neq A$, $[g, y] = x$ existiert. Dann ist $\Omega \lesssim |[g, \mathfrak{B}(f)]|$, wäre also f ein I II-Ding, so wären es auch $\mathfrak{B}(f)$, $|[g, \mathfrak{B}(f)]|$, und Ω; das letztere ist aber (vgl. den Beweis von Satz 8) gewiß falsch. Also ist f kein I II-Ding.

Damit ist IV. 2. restlos bewiesen — und somit auch die Behauptung β.

2. Es bleibt übrig, die Schlußbemerkungen vom § 4 der Einleitung zu erörtern.

Aus S* + VI. folgt (nach β) S, und natürlich auch VI., also S + VI. Wenn S* widerspruchfrei ist, so ist es auch S* + VI (nach α), und nach dem soeben Gesagten auch S + VI. Weil aus S + VI. (ja schon aus S) S* folgt, hat umgekehrt die Widerspruchfreiheit von S + VI. die von S* zur Folge. Schließlich liegt S (in bezug auf den Umfang der Forderungen) zwischen S* und S + VI., daher ist die Widerspruchfreiheit eines jeden der drei Systeme S*, S, S + VI. mit der der zwei anderen gleichbedeutend. (Unsere Überlegungen zeigen übrigens, daß die Axiomensysteme S* + VI. und S + VI. sogar logisch gleichwertig sind.)

S + VI. ist übrigens auch vom Gesichtspunkte der Kategorizitätsfrage der Mengenlehre, die wir hier freilich nicht gebührend erörtern können, von Interesse (vgl. § 4 der Einleitung dieser Arbeit, sowie § 5 Kap. II loc. cit. I). Denn hier ist (im Gegensatze zu S) das Verhältnis von I und I II-Dingen, sowie von $[f, x]$, $\langle x, y\rangle$ und den wirklich mengentheoretischen Operationen genau festgelegt [32]). Es sei erwähnt, daß der Kategorizitätsbeweis trotzdem nicht gelingt, was es als fraglich erscheinen läßt, ob unendliche Systeme überhaupt kategorisch axiomatisiert werden können (vgl. § 5 Kap. II loc. cit. I).

S + VI. ist überhaupt bei Konstruktion von Beispielen bei Unabhängigkeitsfragen im Axiomensystem S von Bedeutung, wir hoffen hierauf noch bei anderer Gelegenheit eingehen zu können.

[32]) Um auf Kategorizität rechnen zu können, müßte man sich allerdings noch mit der (auch im § 5 Kap. II loc. cit. I gestreiften) Frage von der Existenz „regulärer Anfangszahlen mit Limesindex“ auseinandersetzen, dies gelingt aber ohne besondere Schwierigkeiten. Wir gehen hierauf nicht näher ein.

Eingegangen 22. Oktober 1928.

Inhaltsverzeichnis der Bände 141—160.

	Band	Seite
Artin, E. (*Hamburg*) und **Hasse, H.** (*Halle a. S.*), Über den zweiten Ergänzungssatz zum Reziprozitätsgesetz der l-ten Potenzreste im Körper k_ζ der l-ten Einheitswurzeln und in Oberkörpern von k_ζ	154.	143—148
Arwin, A. (*Malmö*), Eine ganzzahlige Transformation einer ternären quadratischen Form	153.	163—174
— —, Einige periodische Kettenbruchentwicklungen	155.	111—128
— —, Weitere periodische Formationen	159.	180—196
Bachmann, P. (*Weimar*), Über den Rest von $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ (mod. p)	142.	41—50
Baer, R. (*Halle a. S.*), Kurventypen auf Flächen	156.	231—246
— —, Isotopie von Kurven auf orientierbaren, geschlossenen Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen	159.	101—116
— —, Die Abbildungstypengruppe der orientierbaren, geschlossenen Fläche vom Geschlechte 2	160.	1—25
— —, Zur Einführung des Scharbegriffs	160.	199—207
— —, Zur Topologie der Gruppen	160.	208—226
Bauer, M. (*Budapest*), Zur Theorie der Fundamentalgleichung	149.	89—96
— —, Bemerkung über die Zusammensetzung der algebraischen Zahlkörper	150.	185—188
Beck, H. (*Bonn a. Rh.*), Über konforme Transformationen im Raume I	155.	61—74
Berwald, L. (*Prag*), Über zweidimensionale allgemeine metrische Räume. I. Teil	156.	191—210
— —, Über zweidimensionale allgemeine metrische Räume. II. Teil	156.	211—222
Bieberbach, L. (*Berlin*), Ein hinreichende Bedingung für schlichte Abbildungen des Einheitskreises	157.	189—192
Bigler (*St. Gallen*), Über eine *Heine*sche Potentialaufgabe	155.	188—198
Bindschedler, K. (*Zürich*), Die Teilungskörper der elliptischen Funktionen im Bereich der dritten Einheitswurzel	152.	49—75
Bôcher, M. (*Cambridge, Mass.*), On *Gibbs's* Phenomenon	144.	41—47
Boecklen, K. (*Chicago*), Bemerkung zu Herrn *A. Fraenkel*s Aufsatz „Die Berechnung des Osterfestes“	153.	61—65
Bohl, P. (*Riga*), Über Differentialungleichungen	144.	284—313
Boehm, K. (*Karlsruhe*), Über einen Determinantensatz, in welchem das Multiplikationstheorem als besonderer Fall enthalten ist	145.	250—253
Böhmel, H. (*Genthin*), *Cesaro*sche Raumkurven und *Mannheim*sche Hilfsgerade	155.	7—14
— —, Kurvenklassen $f(\varkappa, \tau) = 0$ mit vorgegebenen Eigenschaften	156.	176—190
Bohr, H. (*Kopenhagen*), Über die Funktion $\zeta'(s) : \zeta(s)$	141.	217—234
— —, Über die gleichmäßige Konvergenz *Dirichlet*scher Reihen	143.	203—211
— —, Ein Satz über analytische Fortsetzung fastperiodischer Funktionen	157.	61—65
— — und **Courant, R.** (*Göttingen*), Neue Anwendungen der Theorie der *Diophant*ischen Approximationen auf die *Riemann*sche Zetafunktion	144.	249—274

	Band	Seite
Brandt, H. (*Aachen*), Zur Komposition der quaternären quadratischen Formen	143.	106—127
— —, Komposition der binären quadratischen Formen relativ einer Grundform	150.	1—46
— —, Klassenanzahlen bei linearen Substitutionen	152.	235—238
Brauer, A. (*Berlin*), Über diophantische Gleichungen mit endlich vielen Lösungen	160.	70—99
Breuer, S. (*Karlsruhe i. B.*), Metazyklische Minimalbasis und komplexe Primzahlen	156.	13—42
Brouwer, L. E. J. (*Amsterdam*), Über den natürlichen Dimensionsbegriff	142.	146—152
— —, Berichtigung	153.	253
— —, Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie	154.	1—7
— —, Virtuelle Ordnung und unerweiterbare Ordnung	157.	255—257
Buchner, P. (*Basel*), Annäherung beliebiger komplexer Größen durch ganze Zahlen des Körpers $\sqrt{-2}$	155.	37—60
Burkhardt, F. (*Dresden*), Über eine Verallgemeinerung der Tetraedergruppe	152.	149—155
Burrau, C. (*Kopenhagen*), Numerische Lösung der Gleichung $\frac{2^{-D}\log 2}{1-2^{-2D}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_n^{-D}\log p_n}{1-p_n^{-2D}}$, wo p_n die Reihe der Primzahlen von 3 an durchläuft	142.	51—53
Burstin, C. (*Wien*) und **Mayer, W.** (*Wien*), Distributive Gruppen von endlicher Ordnung	160.	111—130
Busche, E. (*Hamburg*), Über die Theorie der biquadratischen Reste	141.	146—161
Buschmann, F. (*Halle a. S.*), Die Transformation einer Gruppe ausgezeichneter Kurven erster Art in einen gewöhnlichen Punkt	156.	43—54
Cartan, E. (*Paris*), Sur l'intégration de certains systémes indéterminés d'équations différentielles	145.	86—91
Courant, R. (*Göttingen*), Über die Existenztheoreme der Potential- und Funktionentheorie	144.	190—211
— —, s. Bohr, H. und R. Courant.		
Czuber, E. (*Wien*), Der Mittelwert eines Quotienten	150.	175—179
v. David, L. (*Budapest*), Arithmetisch-geometrisches Mittel und Modulfunktion	159.	154—170
Delaunay, B. (*Kiew*), Zur Bestimmung algebraischer Zahlkörper durch Kongruenzen; eine Anwendung auf die *Abel*schen Gleichungen	152.	120—123
Disse, A. (*Bremen*), Über die Beziehungen zwischen Logarithmus und Numerus in einem p-adischen algebraischen Körper	154.	178—198
— —, Das Fundamentalsystem für die Logarithmen eines p-adischen algebraischen Körpers und sein Regulator	155.	225—250
Epstein, P. (*Frankfurt a. M.*), Über Elementarkettenbrüche, lineare Substitutionen und indefinite binäre quadratische Formen. I	149.	57—88
— —, Über Elementarkettenbrüche, lineare Substutionen und indefinite binäre quadratische Formen. II		32—62
Faber, G. (*München*), Über die *Newton*sche Näherungsformel. (Zweite Abhandlung.)	146.	229—233
— —, Über *Tschebyscheff*sche Polynome	150.	79—106
Färber, A. (*Stuttgart*), Über das elliptische Integral	154.	94—95
Fejér, L. (*Budapest*), Über die Bestimmung des Sprunges der Funktion aus ihrer Fourierreihe	142.	165—188
— —, Über konjugierte trigonometrische Reihen	144.	48—56
— —, Über trigonometrische Polynome	146.	53—82
Fekete, M. (*Budapest*), Über einen Satz des Herrn *Serge Bernstein*	146.	88—94
Fischer, E. (*Köln*), Über die Differentiationsprozesse der Algebra	148.	1—78
Föppl, L. (*München*), Stabile Anordnungen von Elektronen im Atom	141.	251—302

	Band	Seite
Fraenkel, A. (*Kiel*), Axiomatische Begründung von *Hensels* p-adischen Zahlen	141.	43—76
— —, Über die Teiler der Null und die Zerlegung von Ringen	145.	139—176
— —, Über einfache Erweiterungen zerlegbarer Ringe	151.	121—166
— —, Axiomatische Theorie der geordneten Mengen (Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. II.)	155.	129—158
— —, Die Gleichheitsbeziehung in der Mengenlehre	157.	79—81
Fueter, R. (*Zürich*), Die Klassenzahl zyklischer Körper vom Primzahlgrad, deren Diskriminante nur eine Primzahl enthält	147.	174—183
— —, Über automorphe Funktionen in bezug auf Gruppen, die in der Ebene uneigentlich diskontinuierlich sind	157.	66—78
Furtwängler, Ph. (*Wien*), Über die Reziprozitätsgesetze für Primzahlpotenzexponenten	157.	15—25
Gasiorowski, L. (*Krakau*), Die Herstellung geschlossener singularitätenfreier algebraischer Flächen von beliebig hohem Zusammenhang	146.	156—160
Grawe, D. (*Kiew*), Über die linearen Differentialgleichungen, die in bezug auf die lineare gebrochene Transformationsgruppe invariant sind	156.	164—175
Grommer, J. (*Göttingen*), Ganze transzendente Funktionen mit lauter reellen Nullstellen	144.	114—166
Gronwall, T. H., (*Princeton*), Über einige Summationsmethoden und ihre Anwendung auf die *Fourier*sche Reihe	147.	16—35
v. Grosschmid, L. (*Budapest*), Zur Theorie der quadratischen Reste	145.	254—257
Haar, A. (*Klausenburg*), Über die Variation der Doppelintegrale	149.	1—18
Hahn, H. (*Wien*), Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen	157.	214—229
Haentzschel, E. (*Berlin*), Bedingungen für die Lösung des *Fermat*schen Problems $y^2 = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4$	144.	275—283
Hardy, G. H. (*Oxford*) und **Littlewood, J. E.** (*Cambridge*), Elementary theorems concerning power series with positive coefficients and moment constants of positive functions	157.	141—158
Hasse, H. (*Halle a. S.*), Über die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen im Körper der rationalen Zahlen	152.	129—148
— —, Über die Äquivalenz quadratischer Formen im Körper der rationalen Zahlen	152.	205—224
— —, Symmetrische Matrizen im Körper der rationalen Zahlen	153.	12—43
— —, Zur Theorie des quadratischen *Hilbert*schen Normenrestsymbols in algebraischen Körpern	153.	76—93
— —, Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper	153.	113—130
— —, Äquivalenz quadratischer Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper	153.	158—162
— —, Zur Theorie des *Hilbert*schen Normenrestsymbols in algebraischen Zahlkörpern	153.	184—191
— —, Das allgemeine Reziprozitätsgesetz und seine Ergänzungssätze in beliebigen algebraischen Zahlkörpern für gewisse, nicht-primäre Zahlen	153.	192—207
— —, Direkter Beweis des Zerlegungs- und Vertauschungssatzes für das *Hilbert*sche Normenrestsymbol in einem algebraischen Zahlkörper im Falle eines Primteilers „l" des Relativgrades l	154.	20—35
— — Über das allgemeine Reziprozitätsgesetz der l-ten Potenzreste im Körper k_ζ der l-ten Einheitswurzeln und in Oberkörpern von k_ζ	154.	96—109
— —, Zur Theorie des *Hilbert*schen Normenrestsymbols in algebraischen Zahlkörpern	154.	174—177
— —, Das allgemeine Reziprozitätsgesetz der l-ten Potenzreste für beliebige, zu l prime Zahlen in gewissen Oberkörpern des Körpers der l-ten Einheitswurzeln	154.	199—214

	Band	Seite
Hasse, H. (*Halle a. S.*), Der zweite Ergänzungssatz zum Reziprozitätsgesetz der l-ten Potenzreste für beliebige zu l prime Zahlen in gewissen Oberkörpern des Körpers der l-ten Einheitswurzeln	154.	215—218
— —, Über die Einzigkeit der beiden Fundamentalsätze der elementaren Zahlentheorie	155.	199—220
— —, Neue Begründung der komplexen Multiplikation	157.	115—139
— —, Über das Reziprozitätsgesetz der m-ten Potenzreste	158.	228—259
— —, Über eindeutige Zerlegung in Primelemente oder in Primhauptideale in Integritätsbereichen	159.	3—12
— —, s. Artin, E. und H. Hasse.		
Haupt, O. (*Erlangen*), Über Asymptoten ebener Kurven	152.	6—10
— —, Über Asymptoten ebener Kurven	152.	239
— —, Zur Erzeugung der Primfunktion von *Prym* und *Rost*	158.	56—61
Hausdorff, F. (*Bonn*), *Lipschitz*sche Zahlensysteme und *Study*sche Nablafunktionen	158.	113—127
Haussner, R. (*Jena*), Über numerische Lösungen der Kongruenz $u^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$	156.	223—226
— —, Untersuchungen über Lückenzahlen und den *Goldbach*schen Satz	158.	173—194
Hecke, E. (*Hamburg*), Über das Verhalten von $\sum_{m,n} e^{2\pi i \tau \frac{\lvert m^2-2n^2 \rvert}{8}}$ und ähnlichen Funktionen bei Modulsubstitutionen	157.	159—170
Hellinger, E. (*Frankfurt a. M.*) und **Toeplitz, O.** (*Bonn*), Zur Einordnung der Kettenbruchtheorie in die Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen	144.	212—238
— — — —, Berichtigung dazu	144.	318
Hensel, K. (*Marburg a. L.*), Über die Grundlagen einer neuen Theorie der quadratischen Zahlkörper	144.	57—70
— —, Untersuchung der Zahlen eines algebraischen Körpers für den Bereich eines beliebigen Primteilers	145.	92—113
— —, Die multiplikative Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines beliebigen Primteilers	146.	189—215
— —, Untersuchung der Zahlen eines algebraischen Körpers für eine beliebige Primteilerpotenz als Modul	146.	216—228
— —, Allgemeine Theorie der Kongruenzklassengruppen und ihrer Invarianten in algebraischen Körpern	147.	1—15
— —, Die Verallgemeinerung des *Legendre*schen Symboles für allgemeine algebraische Körper	147.	233—248
— —, Über die Invarianten algebraischer Körper	149.	125—146
— —, Über die Zerlegung der Primteiler in relativ cyklischen Körpern, nebst einer Anwendung auf die *Kummer*schen Körper	151.	112—120
— —, Die Zerlegung der Primteiler eines beliebigen Zahlkörpers in einem auflösbaren Oberkörper	151.	200—209
— —, Zur multiplikativen Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines Primteilers	151.	210—212
— —, Über ein neues Normenrestsymbol und seine Anwendung auf die Theorie der Normenreste in allgemeinen algebraischen Körpern	152.	225—234
— —, Arithmetische Eigenschaften der Polynomialkoeffizienten	153.	8—11
— —, Über Potenzreihen von Matrizen	155.	107—110
— —, Über eindeutige Zerlegung in Primelemente	158.	195—198
— —, Über den Zusammenhang zwischen den Systemen und ihren Determinanten	159.	246—254
— —, Über Systeme in einfachen Körpern	160.	131—142
Herzberger, M. (*Jena*), Untersuchungen über die Eigenschaften erster Ordnung von reellen Strahlensystemen. 1. Analytische Darstellung der Theorie	159.	36—49
— —, Über die geometrische Bedeutung des Rotationswinkels in der Strahlengeometrie	160.	33—37

	Band	Seite
Hoheisel, G. (*Breslau*), Untersuchungen über die asymptotische Integration linearer Differentialgleichungen	153.	228—244
— —, Der Wertevorrat von Lösungen linearer Differentialgleichungen	153.	245—248
— —, Auswertung bestimmter Integrale	156.	67—68
— —, Über das Minimum von ganzen Funktionen	156.	247—248
Hölder, O. (Leipzig), Über einen Grenzübergang in *Abels* Recherches sur les Fonctions Elliptiques	157.	171—188
Hollcroft, T. R. (*Aurora, U. S. A.*), Limits for double points of surfaces	159.	255—264
Holzer, L. (*Graz*), Über die Gleichung $x^3 + y^3 = Cz^3$	159.	93—100
Horn, J. (*Darmstadt*), Zur Theorie der nicht linearen Differential- und Differenzengleichungen	141.	182—216
— —, Über das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle	143.	212—240
— —, *Laplace*sche Integrale als Lösungen nicht linearer Differentialgleichungen	144.	167—189
— —, *Laplace*sche Integrale als Lösungen von Funktionalgleichungen	146.	95—115
— —, *Laplace*sche Integrale als Lösungen nicht linearer Differentialgleichungen	151.	167—199
Jackson, D. (*Cambridge*), Note on rational functions of several complex variables	146.	185—188
Jänichen, W. (*Berlin*), Über die Näherungsnenner *Stieltjes*scher Kettenbrüche	156.	55—66
Jentzsch, R. (*Berlin*), Über Integralgleichungen mit positivem Kern	141.	235—244
Jolles, S. (*Berlin*), Invarianz und Umkehrung von Projektivitäten und Kollineationen	149.	19—56
Jung, H. W. E. (*Halle a. S.*), Über die ausgezeichneten Kurven algebraischer Flächen	142.	61—117
— —, Über algebraische Flächen	150.	47—78
— —, Über die *Salmon*schen Tangenten einer algebraischen Fläche	152.	11—29
Kamke, E. (*Tübingen*), Über die simultane Zerfällung ganzer Zahlen in 1-te und n-te Potenzen	152.	30—32
Kienast, A. (*Küsnacht b. Zürich*), Über die Darstellung analytischer Funktionen durch bestimmte Integrale	152.	109—119
Klein, F. (*Barmen*), Über die Anzahl der Lösungen von Kongruenzensystemen	159.	29—35
— —, Zur Theorie der linearen Kongruenzensysteme	159.	238—245
Kneser, A. (*Breslau*), Die *Gauß*sche Theorie der geodätischen Linie übertragen auf das *Mayer*sche Problem der Variationsrechnung	146.	116—127
— —, Transformationsgruppen und Variationsrechnung	147.	54—66
— —, Neue Untersuchung einer Reihe aus der Theorie der elliptischen Funktionen	158.	209—218
Knopp, K. (*Tübingen*), Über *Lambert*sche Reihen	142.	283—315
— —, Berichtigung zu dem Aufsatze „Über *Lambert*sche Reihen“ in Bd. 142	143.	50
Koebe, P. (*Leipzig*), Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. I. Die Kreisabbildung des allgemeinsten einfach und zweifach zusammenhängenden schlichten Bereichs und die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung	145.	177—223
— —, Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. III. Der allgemeine Fundamentalsatz der konformen Abbildung nebst einer Anwendung auf die konforme Abbildung der Oberfläche einer körperlichen Ecke	147.	67—104
König, R. (*Jena*), Beiträge zur Arithmetik der hyperelliptischen Funktionenkörper	142.	191—210
— —, Arithmetische Theorie der verzweigten multiplikativen Funktionen und Differentiale	146.	161—184

	Band	Seite
König, R. (*Jena*), *Riemann*sche Funktionen- und Differential-Systeme in der Ebene. Arithmetischer Teil	148.	146—182
— —, Über Polynomsysteme, die aus der hypozykloidischen Abbildung entspringen. I.	159.	67—81
— — und **Krafft, M.** (*Marburg*), Über Reihenentwicklung analytischer Funktionen	154.	164—173
Koschmieder, L. (*Brünn*), Anwendung der Integralgleichungen auf eine thermoelastische Aufgabe	143.	285—293
— —, Konjugierte Punkte und Enveloppen bei speziellen Variationsproblemen	147.	105—131
— —, Über die Integration zweier Systeme partieller Differentialgleichungen mittels der hypergeometrischen Reihen zweier Veränderlichen	154.	42—49
Kostka, C. (*Insterburg*), Schlußformel zur Hauptaufgabe der symmetritrischen Funktionen	148.	88—99
Kowalewski, G. (*Dresden*), Über Differentialinvarianten von Raumkurven	155.	1—6
— —, Über die *Batemans*che Transformationsgruppe	157.	193—197
Krafft, M. (*Marburg a. L.*), s. König, R. und M. Krafft.		
Kürschák, J. (*Budapest*), Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie	142.	211—253
— —, Über spezielle Funktionenreihen	148.	113—115
— —, Irreduzible Formen	152.	180—191
Landau, E. (*Göttingen*), Über *Dirichlet*sche Reihen mit komplexen Charakteren	157.	26—32
Laudien, H. (*Hirschberg*), Entwicklung willkürlicher Funktionen bei einem thermoelastischen Problem	148.	79—87
Lemke, H. (*Berlin*), Über die Differentialgleichungen, welche den Gleichgewichtszustand eines gasförmigen Himmelskörpers bestimmen, dessen Teile gegeneinander nach dem *Newton*schen Gesetze gravitieren	142.	118—145
Lichtenstein, L. (*Leipzig*), Über das *Poisson*sche Integral und über die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung des logarithmischen Potentials	141.	12—42
— —, Randwertaufgaben der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. I. Die erste Randwertaufgabe. Allgemeine ebene Gebiete	142.	1—40
— —, Über das *Poisson*sche Intégral und über die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung des logarithmischen Potentials	142.	189—190
— —, Randwertaufgaben der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. II. Abteilungsweise stetige Koeffizienten. Das zweite Randwertproblem. Gemischte Randbedingungen	143.	51—105
— —, Über einige Existenzprobleme der Variationsrechnung. Methode der unendlichvielen Variabeln	145.	24—85
— —, Zur Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus	158.	80—91
Liebmann, H. (*Heidelberg*), Zur Geometrie der *Laguerre*-Gruppe	154.	15—19
— —, Bestimmung der geodätisch-rhombischen Netze bei konstantem Krümmungsmaß	158.	49—55
Lipka, S. (*Szeged*), Eine Verallgemeinerung des *Rouché*schen Satzes	160.	143—150
Littlewood, J. E. (*Cambridge*), s. Hardy, G. H. und J. E. Littlewood.		
Lorey, W. (*Leipzig*), August Leopold *Crelle* zum Gedächtnis	157.	3—11
Loewy, A. (*Freiburg i. B.*), Über abstrakt definierte Transmutationssysteme oder Mischgruppen	157.	239—254
v. Ludwig, B. (*Berlin*), Zur Theorie des *Malfatti*schen Problems	153.	175—183
— —, Über die erweiterte Umkehrung des *Abel*schen Theorems	154.	36—41
— —, Die natürliche Verallgemeinerung des *Jacobi*schen Umkehrproblems	154.	50—61

	Band	Seite
v. Ludwig, B. (*Berlin*), Von der Umkehrung eines einzelnen *Abel*schen Integrals	155.	26—36
Lukáçs, F. (*Budapest*), Über die Bestimmung des Sprunges einer Funktion aus ihrer Fourierreihe	150.	107—112
Maier, W. (*Frankfurt a. M.*), Potenzreihen irrationalen Grenzwertes	156.	93—148
Mayer, W. (*Wien*), s. Burstin, C. und W. Mayer.		
Mehmke, R. (*Stuttgart*), Einige Sätze über Matrizen	152.	33—39
Mertens, F. (*Wien*), Ein Satz zur Bildung algebraisch lösbarer Gleichungen	157.	199—213
Meyer, W. Fr. (*Königsberg i. Pr.*), Über die Achsenflächen eines Büschels linearer Komplexe und ihre Beziehung zum Zylindroid	159.	50—64
Mittag-Leffler, G. (*Djursholm*), Der Satz von *Cauchy* über das Integral einer Funktion zwischen imaginären Grenzen	152.	1—5
— —, Auszug aus einem Briefe an den Herausgeber dieser Zeitschrift	157.	12—14
Müller, F. (*Dresden*), Zur Geometrie der Gruppe aller Berührungstransformationen der Kugeln	154.	131—142
v. Neumann, J. (*Berlin*), Eine Axiomatisierung der Mengenlehre	154.	219—240
— —, Berichtigung zu der Arbeit „Eine Axiomatisierung der Mengenlehre“ in Bd. 154	155.	128
— —, Über eine Widerspruchfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre	160.	227—241
Noether, E. (*Göttingen*), Der Diskriminantensatz für die Ordnungen eines algebraischen Zahl- oder Funktionenkörpers	157.	82—104
Olsson, O. (*Örebro, Schweden*), Einige Anwendungen der hydrodynamischen Theorien von *Kirchhoff-Clebsch*	150.	113—156
Ostrowski, A. (*Basel*), Über einige Fragen der allgemeinen Körpertheorie	143.	255—284
— —, Über sogenannte perfekte Körper	147.	191—204
— —, Über ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpern	149.	117—124
Pál, J. (*Székelyudvarhely*), Über die Existenz einer *Jordan*schen Kurve $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ bei vorgeschriebenem $\varphi(t)$	143.	294—299
— —, Über Funktionen, die *Jordan*sche Gebilde darstellen	145.	1—8
Pallas, W. (*Dresden*), Über eine Fläche, auf der die Asymptotenlinien ein Gewebe bilden	160.	151—176
Pasch, M. (*Gießen*), Grundfragen der Geometrie	147.	184—190
— —, Sechs Punkte eine Ebene	147.	249—250
— —, Über quaternäre Linienkoordinaten	148.	116—121
Perron, O. (*München*), Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängig Variable reell ist. (Erste Mitteilung.)	142.	254—270
— —, Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängig Variable reell ist. (Zweite Mitteilung.)	143.	25—50
— —, Abschätzung der Lösung der *Pell*schen Gleichung	144.	71—73
— —, Über Systeme von linearen Differenzengleichungen erster Ordnung	147.	36—53
— —, Über das Verhalten einer ausgearteten hypergeometrischen Reihe bei unbegrenztem Wachstum eines Parameters	151.	63—78
Plessner, A. (*Marburg a. L.*), Über Konvergenz von trigonometrischen Reihen	155.	15—25
— —, Über das Verhalten analytischer Funktionen am Rande ihres Definitionsbereichs.	158.	219—227
— —, Eine Kennzeichnung der totalstetigen Funktionen	160.	26—32
Pólya, G. (*Zürich*), Algebraische Untersuchungen über ganze Funktionen vom Geschlechte Null und Eins	145.	224—249
— —, Über ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpern	149.	97—116
— —, Arithmetische Eigenschaften der Reihenentwicklungen rationaler Funktionen	151.	1—31
— —, Über trigonometrische Integrale mit nur reellen Nullstellen	158.	6—18
— — und **Schur, J.** (*Berlin*), Über zwei Arten von Faktorenfolgen in der Theorie der algebraischen Gleichungen	144.	89—113

	Band	Seite
Prasad, G. (Calcutta), On the differentiability of the integral function	160.	100—110
Przewisinski, O. (*Breslau*), Die dynamische Stabilität der Bewegung eines Massenpunktes, der von zwei festen Zentren nach dem *Newton*schen Gesetz attrahiert wird	155.	173—187
Rabinowitsch, G. (*Odessa*), Eindeutigkeit der Zerlegung in Primzahlfaktoren in quadratischen Zahlkörpern	142.	153—164
Rados, G. (*Budapest*), Bemerkungen und Ergänzungen zum Beweis eines *Kummer*schen Theorems	152.	192—197
Rauter, H. (*Königsberg i. Pr.*), Studien zur Theorie des *Galois*schen Körpers über dem Körper der rationalen Funktionen einer Unbestimmten t mit Koeffizienten aus einem beliebigen endlichen Körper von p^m Elementen	159.	117—132
— —, Höhere Kreiskörper	159.	220—228
— —, Bemerkung zu der Arbeit: „Studien zur Theorie des *Galois*schen Körpers ....“	159.	228
— —, Abstrakte Kompositionssysteme oder Übergruppen	159.	229—237
Rédei, L. (*Miskolc*), Ein neuer Beweis des quadratischen Reziprozitätssatzes	155.	103—106
— —, Über die Klassenzahl des imaginären quadratischen Zahlkörpers	159.	210—219
Reidemeister, K. (*Königsberg i. Pr.*), Eine Kennzeichnung der Kugel nach *W. Blaschke*	154.	8—14
— —, Eine Kennzeichnung der Kugel nach *W. Blaschke*	154.	260
Rella, T. (*Graz*), Über die multiplikative Darstellung von algebraischen Zahlen eines *Galois*schen Zahlkörpers für den Bereich eines beliebigen Primteilers	150.	157—174
— —, Bemerkungen zu Herrn *Hensels* Arbeit „Die Zerlegung der Primteiler eines beliebigen Zahlkörpers in einem auflösbaren Oberkörper“	153.	108—110
— —, Zur *Newton*schen Approximationsmethode in der Theorie der p-adischen Gleichungswurzeln	153.	111—112
— —, Ordnungsbestimmungen in Integritätsbereichen und *Newton*sche Polygone	158.	33—48
Remak, R. (*Berlin*), Über eine von Herrn *H. A. Schwarz* angegebene Funktion	141.	77—95
— —, Über die Zerlegung der kommutativen Gruppen in zyklische teilerfremde Faktoren	141.	245—250
— —, Neuer Beweis eines Satzes des Herrn *Burnside* über spezielle endliche Gruppen	142.	54—56
— —Neuer Beweis eines *Minkowski*schen Satzes	142.	278—282
— —, Abschätzung der Lösung der *Pell*schen Gleichung im Anschluß an den *Dirichlet*schen Existenzbeweis	143.	250—254
— —, Über die Zerlegung der endlichen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren	153.	131—140
— —, Über die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie	156.	227—230
Reye, Th. (*Würzburg*), Die kubische Raumkurve als Leitkurve von Regelflächen dritten bis sechsten Grades	152.	125—128
Riebesell, P. (*Hamburg*), Über die Lehre vom statistischen Ausgleich	152.	198—204
Riesz, F. (*Szeged*), Über ein Problem des Herrn *Carathéodory*	146.	83—87
Rosanes, J. (*Breslau*), Ein Satz über konjugierte Formen	142.	57—60
— —, Zur Theorie der Kegelschnitte	142.	271—277
— —, Bemerkungen zu der Aufgabe, eine quadratische Form als Summe von Quadraten linearer Formen darzustellen	150.	180—184
Roeser, E. (*Bottrop*), Von der Umkehrbarkeit des Parallelismus in der nichteuklidischen Ebene	153.	249—252
— —, Ein neuer Zusammenhang zwischen den Trigonometrien der beiden nichteuklidischen Ebenen	154.	149—150
— —, Das rechtwinklige Fünfeck der hyperbolischen Ebene und die *Engel-Napier*sche Regel	154.	151—153
— —, Über Koordinatensysteme im unendlich fernen und im imaginären Teil der *Bolyai-Lobatschefski*schen Ebene	155.	221—224

	Band	Seite
Rychlík, K. (*Prag*), Eine stetige nicht differenzierbare Funktion im Gebiete der *Hensel*schen Zahlen	152.	178—179
— —, Zur Bewertungstheorie der algebraischen Körper	153.	94—107
Schilling, B. (*Dresden*), Eine neue Bestimmung aller Berührungstransformationen der Kreise in der Ebene	154.	241—259
Schlesinger, L. (*Gießen*), Über eine Klasse von Differentialsystemen beliebiger Ordnung mit festen kritischen Punkten	141.	96—145
— —, Über Randwerte von Funktionen einer komplexen Veränderlichen	158.	1—5
Schmeidler, W. (*Breslau*), Zur affinrationalen Geometrie	153.	215—227
— —, Über adjungierte Polynome bei irreduziblen algebraischen Gebilden beliebiger Mannigfaltigkeit	158.	19—32
Schönhardt, E. (*Tübingen*). Ein Beitrag zur Theorie der linearen Substitutionsgruppen	154.	63—93
Schottky, F. (*Berlin*), Über die Funktionsklasse, die der Gleichung $F\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)=F(x)$ genügt	143.	1—24
— —, Über einige Kurven- und Flächengleichungen, die mit der Algebra der Thetafunktionen zusammenhängen	146.	128—155
— —, Über das *Cauchy*sche Integral	146.	234—244
— —, Problematische Punkte und die elementaren Sätze, die zum Beweise des *Picard*schen Theorems dienen	147.	161—173
— —, Über die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen, denen die sechs hyperelliptischen Quotienten $\frac{\sigma_{\alpha\beta}(u,v)}{\sigma(u,v)}$ $(\alpha,\beta=1,2,3,4;\ \alpha\leqq\beta)$ genügen	158.	92—112
v. Schrutka, L. (*Wien*), Zur Systematik der additiven Zahlentheorie. I.	146.	245—254
Schur, A. (*Bonn*), Biegungen punktierter Eiflächen	159.	82—92
Schur, J. (*Berlin*), Zwei Sätze über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln	144.	75—88
— —, Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind	147.	205—232
— —, Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind (Fortsetzung)	148.	122—145
— —, Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen	151.	79—111
— —, Über die reellen Kollineationsgruppen, die der symmetrischen oder der alternierenden Gruppe isomorph sind	158.	63—79
— —, s. Pólya, G. und J. Schur.		
Schwering, K. (*Köln*), Die Siebenteilung der lemniskatischen Funktion sin am (u)	152.	40—48
Sommerfeld, A. (*München*), Asymptotische Darstellung von Formeln aus der Beugungstheorie des Lichtes	158.	199—208
Speiser, A. (*Zürich*), Die Zerlegungsgruppe	149.	174—188
— —, Naturphilosophische Untersuchungen von *Euler* und *Riemann*	157.	105—114
Stäckel, P. (*Heidelberg*), Arithmetische Eigenschaften ganzer Funktionen	148.	101—112
Stammler, G. (*Halle a. S.*), Elementare Betrachtungen über den Aufbau von Zahlverknüpfungen nach Gesetzen	154.	114—130
— —, Elementare Betrachtungen über den Aufbau von Zahlverknüpfungen nach Gesetzen (2. Note)	155.	93—102
— —, Elementare Betrachtnugen über gesetzmäßig aufgebaute Zahlverknüpfungen im Gebiete der rationalen Zahlen	155.	159—172
Staude, O. (*Rostock*), Über Kollineationen und Korrelationen im Raume	152.	156—177
— —, Zur Theorie des Flächenbüschels 2. Ordnung	156.	1—12
Stein, A. (*Hamburg*), Die Gewinnung der Einheiten in gewissen relativquadratischen Zahlkörpern durch das *J. Hurwitz*sche Kettenbruchverfahren	156.	69—92

	Band	Seite
Steinitz, E. (*Kiel*), Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme ..	143.	128—175
— —, Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme (Fortsetzung.)	144.	1—40
— —, Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme. (Schluß.) ..	146.	1—52
— —, Über isoperimetrische Probleme bei konvexen Polyedern	158.	129—153
— —, Über isoperimetrische Probleme bei konvexen Polyedern	159.	133—143
Stengel, C. (*München*), Über quadratische Nichtreste von der Form $8h + 1$	153.	208—214
Study, E. (*Bonn*), Über Summen von fünf und sechs Quadraten und konkonforme Transformationen	157.	33—59
Sturm, R. (*Breslau*), Existenzbeweis des Punktes kleinster Entfernungssumme von vier gegebenen Punkten	143.	241—249
— —, Über das größte Tetraeder, wenn die Inhalte der Flächen gegeben sind	152.	90—98
— —, Zwei Minimalprobleme	152.	99—108
— —, Ein- und Zweischaligkeit von Flächen 3. Ordnung	153.	1—7
Straßmann, R. (*Berlin*), Über den Wertevorrat von Potenzreihen im Gebiet der p-adischen Zahlen	159.	13—28
— —, Nachtrag zur Arbeit: „Über den Wertevorrat von Potenzreihen im Gebiet der p-adischen Zahlen“.....	159.	65—66
Svenson, E. (*Riga*), Zur Theorie der Summengleichungen	160.	38—60
Szász, O. (*Frankfurt a. M.*), Über die Erhaltung der Konvergenz unendlicher Kettenbrüche bei independenter Veränderlichkeit aller ihrer Elemente	147.	132—160
— —, Über die Approximation stetiger Funktionen durch *Bernoulli*sche Polynome	148.	183—188
Takagi, T. (*Tokio*), Zur Theorie des Kreiskörpers	157.	230—238
Tietze, H. (*München*), Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind	145.	9—14
— —, Bemerkungen zu den Sätzen von *J. Pál* über ebene und räumliche *Jordan*sche Kurven	145.	15—23
— —, Über die *Gauß-Green-Stokes*schen Integralsätze	153.	141—157
— —, Über konvexe Figuren	158.	168—172
— —, Bemerkungen über konvexe und nicht-konvexe Figuren	160.	67—69
Toeplitz, O. (*Bonn*), s. Hellinger, E. und O. Toeplitz		
Tornier, E. (*Halle*), Wahrscheinlichkeitsrechnung und Zahlentheorie ..	160.	177—198
Vandiver, H. S. (*Philadelphia*), Extension of the criteria of *Wieferich* and *Mirimanoff* in connection with *Fermat*'s last theorem	144.	314—318
Vogt, W. (*Karlsruhe i. B.*), Metrische Untersuchungen der kubischen Hyperbel, insbesondere der gleichseitigen	141.	303—317
— —, Über monotongekrümmte Kurven	144.	239—248
Wahlin, G. E. (*Urbana*), The Equation $x^l - A = 0(p)$	145.	114—138
— —, The Number e in $k(p)$	154.	110—113
Walsh, J. L. (*Cambridge, Mass.*), Über die Entwicklung einer harmonischen Funktion nach harmonischen Polynomen	159.	197—209
Weatherburn, C. E. (*Christchurch, New Zealand*), On oblique Trajectories of a Family of Curves on a Surface	160.	61—66
Weiß, E. A. (*Bonn*), Über den Zusammenhang zwischen den Parameterdarstellungen der *Weddle*schen Fläche und der gemeinsamen Tangenten zweier Flächen zweiter Ordnung	159.	171—179
Wellstein, J. (*Karlsruhe*), Flächen isotroper Drehungen und Schraubungen	156.	149—163
Welmin, W. (*Warschau*), Das quadratische Reziprozitätsgesetz im beliebigen quadratischen Zahlkörper	149.	147—173
Weyl, G. (*Breslau*), Hinreichende Bedingungen des Extremums bei einer neuen Art von isoperimetrischen Problemen	152.	76—89
Weyl, H. (*Zürich*), Über die Abhängigkeit der Eigenschwingungen einer Membran von deren Begrenzung.....	141.	1—11
— —, Über das Spektrum der Hohlraumstrahlung	141.	163—181
— —, Über die Randwertaufgabe der Strahlungstheorie und asymptotische Spektralgesetze	143.	177—202